Universität des Saarlandes
Fachbereich 14 – Informatik
Prof. Dr. G. Hotz / Dr. E. Schömer / T. Chadzelek

Weihnachtsübungsblatt (Nr. 9) Informatik III

(Abgabe: 13. Januar 1999)

1. **Aufgabe**: 2-WEGE-AUTOMATEN (Punkte: 6)

Die folgende Sprache (von Michael Fischer) illustriert, daß beim Übergang vom nichtdeterministischen 2-Wege-Automaten (2-NEA) zum DEA eine Vergrößerung der Zustandsmenge von $O(n)$ auf 2^{n^2} in Kauf genommen werden muß; dabei ist $\mathcal{X}_a := \{a_{i,j} \mid 1 \leq i,j \leq n\}$, $\mathcal{X}_b := \{b_{i,j} \mid 1 \leq i,j \leq n\}$ und $\mathcal{X} := \mathcal{X}_a \cup \mathcal{X}_b$.

$$L := \{u a_{i,j} v b_{i,j} \mid u, v \in \mathcal{X}_a^*,\ 1 \leq i,j \leq n\}$$

Ein endlicher 2-Wegeautomat verfügt über einen Lesekopf, mit dem er jeweils ein Zeichen „sieht". Dieser steht zunächst auf dem ersten Zeichen der Eingabe und bewegt sich dann nach jedem Schritt entweder links ($\mathtt{L}$) oder rechts ($\mathtt{R}$); vor bzw. hinter dem Eingabewort stehen die Markierungen # bzw. \$. Beschreiben Sie die Kopfbewegung durch eine zusätzliche Kantenbeschriftung aus $\{\mathtt{L}, \mathtt{R}\}$.

Geben Sie je einen möglichst kleinen Automaten der folgenden Typen an, der L akzeptiert, und bestimmen Sie dessen Größe. Machen Sie sich selbst klar, wie der nichtdeterministische Automat die Eingabe erkennt, welche Rolle der Existenzquantor dabei spielt, und warum er eben nicht „alle Möglichkeiten durchprobiert".

(a) 2-NEA (b) 2-DEA (c) NEA (d) DEA

2. **Aufgabe**: ABZÄHLBARKEIT (Punkte: 6)

Eine Menge M heißt *abzählbar* genau dann, wenn es eine Surjektion $f : \mathbb{N} \to M$ gibt.

(a) Zeigen Sie, daß es dann auch eine injektive Numerierung $g : M \to \mathbb{N}$ gibt.
(b) Zeigen Sie, daß die Menge $\mathbb{N}^2$ abzählbar ist. Geben Sie zu jedem Paar $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ seine Nummer $g(p,q)$ gemäß Ihrem Schema an. Wie berechnet sich umgekehrt zu einer Nummer n das zugehörige Paar $f(n)$?
(c) Folgern Sie daraus, daß die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist.
(d) Folgern Sie weiter, daß auch $\mathbb{N}^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ abzählbar ist.
(e) Ist die Menge $\mathbb{N}^*$ abzählbar? Beweisen Sie Ihre Aussage.

3. **Aufgabe**: PRIMITIV REKURSIVE FUNKTIONEN (Punkte: 8)

(a) Im folgenden soll von zwei einfachen Funktionen gezeigt werden, daß sie *primitiv rekursiv* (p.r.) sind. Verwenden Sie dazu wie in der Vorlesung schaltkreisartige Bilder sowie algebraische Ausdrücke und außer den p.r. Basisfunktionen nur die genannten.

  i. Führen Sie die charakteristische Funktion von $\leq$ zurück auf Subtraktion und Signum:

$$\chi_\leq : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ \chi_\leq(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \leq y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  ii. Führen Sie die Kronecker-Funktion δ zurück auf Multiplikation und $\chi_\leq$.

$$\delta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ \delta(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Geben Sie p.r. Realisierungen von Division, Restwert, kleinstem gemeinsamen Vielfachen und größtem gemeinsamen Teiler $\mathrm{div}, \mathrm{mod}, \mathrm{kgV}, \mathrm{ggT} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ an. Spezifizieren Sie dazu ein geeignetes Verhalten in Spezialfällen (z.B. $\mathrm{div}(x,0)$), damit die Funktionen total werden.

(c) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \in \mathbb{P}$ beliebig ($\mathbb{P}$ sei die Menge aller p.r. Funktionen). Der Operator $\nabla : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ bilde f ab auf $\nabla f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $(\nabla f)(x) := f^x(x)$. Beginnend mit der Nachfolgerfunktion $f_0 := N$ wird eine Folge $f_{k+1} := \nabla f_k$ gebildet; dann definiert man $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto f_x(x)$.

  i. Zeigen Sie, daß $\nabla f \in \mathbb{P}$ gilt.
  ii. Bestimmen Sie $F(x)$ für $x \in \{0, \ldots, 4\}$.

4. **Aufgabe**: BONUSAUFGABE (Punkte: 20)

Erinnern Sie sich an Blatt 7, Aufgabe 3(d): Seien p, q zwei unterscheidbare Zustände und $x \in \mathcal{X}^*$ ein kürzestes Wort, das sie unterscheidet. Geben Sie eine obere Schranke für $|x|$ als Funktion von $\#V$ an sowie ein Beispiel, in dem diese Schranke bis auf einen konstanten Faktor erreicht wird. Tun Sie dies für die folgenden Automatentypen:

(a) NEA mit ε-Übergängen (b) NEA ohne ε-Übergänge (c) DEA (d) vollständiger DEA

Anmerkung: Ein interessantes Programm zum Thema ***A**utomata, **Mo**noids, and **R**egular **E**xpressions* ist AMORE; Informationen findet man unter http://www.informatik.uni-kiel.de/inf/Thomas/amore.html.