Universität des Saarlandes
Fachbereich 14 – Informatik
Prof. Dr. G. Hotz / Dr. E. Schömer / T. Chadzelek

8. Übungsblatt Informatik III

(Abgabe: 16. Dezember 1998)

1. **Aufgabe**: REGULÄR ODER NICHT? (Punkte: 6)

Diese Aufgabe soll die Grenzen der Fähigkeit endlicher Automaten etwas näher beleuchten. Sei dazu $L \in \mathrm{REG}(\mathcal{X}^*)$ beliebig und $\mathfrak{a}$ ein NEA, der L akzeptiert. Erinnern Sie sich an das 6. Übungsblatt, Aufgabe 3, und die dort definierten regulären Sprachen $\overline{L}$ (Spiegelung!), $\mathrm{Ot}(L)$ und $L_{k\cdot}$ mit den zugehörigen NEAs $\overline{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_{k\cdot}$. Dabei entsteht $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{a} \times \overline{\mathfrak{a}}$, wenn man $T_{\mathfrak{b}} := \{(v, v) \mid v \in V_{\mathfrak{a}}\}$ wählt.

(a) Indem man $\mathfrak{a} \times \overline{\mathfrak{a}}_{(k-1)\cdot}$ bildet, kann man $\frac{1}{k}(L) := \{u \in \mathcal{X}^* \mid \exists\, v \in \mathcal{X}^* : uv \in L \wedge |uv| = k|u|\}$ akzeptieren. Wie muß man dabei die Start- und Endzustände wählen?

(b) Zeigen Sie nun, daß auch $L/k := \{v \in \mathcal{X}^* \mid \exists\, u \in \mathcal{X}^* : uv \in L \wedge |uv| = k|v|\}$ regulär ist. *Hinweis:* Wenden Sie an, was Sie über $\frac{1}{k}(L)$ wissen.

(c) Eine ähnliche Konstruktion erkennt das mittlere Drittel $\frac{L}{3} := \{v \in \mathcal{X}^* \mid \exists\, u, w \in \mathcal{X}^* : uvw \in L \wedge |u| = |v| = |w|\}$. *Hinweis:* Halten Sie zunächst Anfangs- und Endpunkt des Weges fest, entlang dessen v gelesen wird. Betrachten Sie $\overline{\mathfrak{a}}_{1\cdot} \times \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}_{1\cdot}$, und wählen Sie die Start- und Endzustände geeignet. Verallgemeinern Sie anschließend.

(d) Nun könnte man meinen, das Weglassen des mittleren Drittels erzeuge auch noch eine reguläre Sprache. Zeigen Sie jedoch, daß $L' := \{uw \in \mathcal{X}^* \mid \exists\, v \in \mathcal{X}^* : uvw \in L \wedge |u| = |v| = |w|\}$ im allgemeinen nicht regulär ist. *Hinweis:* Betrachten Sie speziell $L = 0^*\$1^*$ und $L' \cap 0^*1^*$.

2. **Aufgabe**: PUMPING-LEMMA (Punkte: 8)

Sei $L \in \mathrm{REG}(\mathcal{X}^*)$, $\mathfrak{a} = (\mathcal{W}(G), S, T, \mu, \mathcal{X})$ ein NEA mit $\mu : E \to \mathcal{X}$, der L akzeptiert, und $n := \#V$.

(a) Zeigen Sie: Wenn es einen langen Weg gibt ($w \in \mathcal{W}(G)(S, T)$ mit $|w| \geq n$), dann gibt es bereits unendlich viele solcher Wege ($\#\mathcal{W}(G)(S, T) = \infty$).

(b) Sei jetzt $u := \mu(w) \in L$ mit $|u| \geq n$. Geben Sie eine unendliche Teilmenge $L' \subseteq L$ an, die daraus resultiert.

(c) Erläutern und zeigen Sie das folgende Lemma: $\forall\, L \in \mathrm{REG}(\mathcal{X}^*) \quad \exists\, n_L \in \mathbb{N} \quad \forall\, u \in L,\ |u| \geq n_L \quad \exists\, x, y, z \in \mathcal{X}^*,\ |xy| \leq n_L,\ y \neq \varepsilon,\ u = xyz \quad \forall\, k \in \mathbb{N} : \quad xy^kz \in L$

(d) Nutzen Sie dieses zum Nachweis, daß folgende Sprachen nichtregulär sind, dabei sei jeweils $\mathcal{X} = \mathbb{B}$.
   i. $L_1 := \{xw\overline{x} \mid x \in \mathbb{B}^+, w \in 1^+\}$
   ii. $L_2 := \{x\overline{x}w \mid x, w \in \mathbb{B}^+\}$
   iii. $L_3 := \{1^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ ist prim}\}$

3. **Aufgabe**: REGULÄRE AUSDRÜCKE MIT $\cap$ (Punkte: 6)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $w := ((\ldots((x_1^2x_2)^2x_3)^2\ldots)^2x_n)^2 \in \mathcal{X}^*$. Ein *regulärer Ausdruck* (RA) über $\mathcal{X}$ entsteht aus den Atomen $\emptyset$ und $\{x_i\}$ durch die Operatoren $\cdot$, $\cup$ und *; in *erweiterten* regulären Ausdrücken (ERA) erlauben wir nun auch $\cap$. Die Größe eines Ausdrucks sei die Anzahl seiner Operatoren.

(a) Wieviele Atome kann ein Ausdruck mit k Operatoren enthalten?

(b) Zeigen Sie, daß der kürzeste RA für w *exponentielle* Größe hat.

(c) Zeigen Sie, daß es für w einen ERA *quadratischer* Größe gibt. *Hinweis:* Sei A ein RA, dessen Sprache das Zeichen b nicht verwendet. Finden Sie einen ERA für $(A \cdot b)^2$, der A nur einmal enthält.