Universität des Saarlandes
Fachbereich 14 – Informatik
Prof. Dr. G. Hotz / Dr. E. Schömer / T. Chadzelek

2. Übungsblatt Informatik III

(Abgabe: 4. November 1998)

1. **Aufgabe**: MONOIDE (Punkte: 6)

Wir vereinbaren die Schreibweise $M' \prec M$ für den Umstand, daß M' ein Untermonoid von M ist. Für ein beliebiges Monoid $(M, \circ)$ mit Teilmenge $L \subset M$ sei das von L erzeugte Untermonoid

$$\langle L \rangle_M := \bigcap_{L \subset M' \prec M} M'.$$

(a) Beweisen Sie: $\langle L \rangle_M \prec M$.

(b) Sei $L^* := \{w : [1 : n] \to L \mid n \in \mathbb{N}\}$ das *Wörtermonoid* über L. Welcher einfache Zusammenhang besteht zwischen L^* und $\langle L \rangle_M$?

(c) Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel für ein Monoid $(M, \circ)$ und eine Teilmenge $L \subset M$, so daß zwar $(L, \circ)$ für sich genommen ein Monoid darstellt, aber L kein *Untermonoid* von M ist.

2. **Aufgabe**: FREIE MONOIDE (Punkte: 6)

(a) Welches Gesetz gilt in $(\mathbb{Z}, +)$, aber nicht in freien Monoiden? Warum schlägt deshalb die Fortsetzung einer gegebenen Abbildung $h : \{-1, 1\} \to M$ zu einem Monoidhomomorphismus $h : \mathbb{Z} \to M$ im allgemeinen fehl?

(b) Zeigen Sie, daß $E := \{\mathtt{a}, \mathtt{ab}, \mathtt{b}\}$ kein freies Erzeugendensystem von $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ ist.

(c) Bilden die natürlichen Zahlen mit der Addition bzw. der Multiplikation ein freies Monoid? Beweisen Sie ihre Aussage und geben Sie ein Erzeugendensystem für $(\mathbb{N}, \cdot)$ an.

3. **Aufgabe**: DYCKSPRACHE (Punkte: 8)

Es sei wie in der Vorlesung $\Sigma := \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ mit $\Sigma^+ = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ und $\Sigma^- = \{\sigma_1^-, \ldots, \sigma_n^-\}$. $D(\Sigma) \subset \Sigma^*$ sei die *Dycksprache* zu Σ und für alle $a \in \Sigma^*$ bezeichne

$$[a] := [a]_{D(\Sigma)} = \{b \in \Sigma^* \mid \forall u, v \in \Sigma^* : \ uav \in D(\Sigma) \iff ubv \in D(\Sigma)\}$$

die zugehörige Äquivalenklasse unter der syntaktischen Kongruenz modulo $D(\Sigma)$. Zeigen Sie:

(a) $[1] = D(\Sigma)$, d.h. alle korrekt geklammerten Ausdrücke sind modulo der Dycksprache syntaktisch kongruent zum leeren Wort.

(b) $0 := [\sigma_i] \cdot [\sigma_j^-]$ für $i \neq j$ ist *wohldefiniert*, d.h. unabhängig von der Wahl von i, j, und es gilt

$$\forall a \in \Sigma^* : \ 0 \cdot [a] = [a] \cdot 0 = 0.$$

(c) Zu jedem $u \in (\Sigma^+)^*$ existiert *genau ein* inverses Element $v \in (\Sigma^-)^*$ mit $[u] \cdot [v] = [1]$.