Universität des Saarlandes
Fachbereich 14 – Informatik
Prof. Dr. G. Hotz / Dr. E. Schömer / T. Chadzelek

12. Übungsblatt Informatik III

(Abgabe: 3. Februar 1999)

1. **Aufgabe**: Entscheidbarkeit & Reduktionen (Punkte: 7)

   Wenn man eine Sprache $L \subset A^*$ vermittels einer Funktion $f : A^* \to A^*$ auf eine andere Sprache $L' \subset A^*$ reduziert hat, so gilt $\forall\, w \in A^* :\ w \in L \iff f(w) \in L'$.

   (a) Zeigen Sie, daß dies äquivalent zu der Bedingung $f^{-1}(L') = L$ ist.

   (b) Warum genügt die Bedingung $f(L) = L'$ nicht?

   (c) Zeigen Sie, daß $H \leq H_0$ gilt, wobei H das allgemeine Halteproblem ist und H_0 dessen Variante für leere Eingaben. Beschreiben Sie dazu die Funktionsweise von f und erläutern Sie, warum f turingberechenbar ist. Machen Sie sich klar, warum deshalb H_0 unentscheidbar ist.

   (d) Zeigen Sie, daß L genau dann entscheidbar ist, wenn sowohl L als auch $\overline{L} := A^* \setminus L$ rekursiv aufzählbar sind.

2. **Aufgabe**: Binäres Zählen (Punkte: 3)

   Geben Sie eine $O(2^n)$-zeitbeschränkte 1-TM an (beachte: $i = \Theta(2^n)$), die angesetzt auf $\mathtt{bin}(i)$ mit $i \in \mathbb{N}$ ihre Bandinschrift der Reihe nach durch $\mathtt{bin}(i \dot{-} 1), \mathtt{bin}(i \dot{-} 2), \ldots, 0$ ersetzt.

3. **Aufgabe**: Pattern-Matching (Punkte: 6)

   Sei $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$. Geben Sie jeweils eine $O(n^2)$-zeitbeschränkte 1-TM an, die angesetzt auf $\mathtt{bin}(x_1)\#\ldots\#\mathtt{bin}(x_k)$ genau dann im Zustand z_{ja} hält, falls die folgende Bedingung zutrifft, und sonst im Zustand z_{nein}. Beweisen Sie die Zeitschranke.

   (a) Es gibt einen Index $1 < i \leq k$, so daß $x_1 = x_i$.

   (b) Es gibt ein Indexpaar $1 \leq i < j \leq k$, so daß $x_i = x_j$.

   Folgern Sie nun daraus, daß der Test, ob eine Zeichenreihe $u \in \mathbb{B}^*$ Gödelisierung einer det. 1-TM ist, von einer 1-TM in quadratischer Zeit durchgeführt werden kann.

4. **Aufgabe**: Aufzählbarkeit (Punkte: 4)

   Erläutern Sie, daß das allgemeine Halteproblem

   $$H = \{u\#v \mid u \in \mathbb{B}^*, v \in \mathbb{A}^*, \mathcal{M}_u \text{ angesetzt auf } v \text{ hält}\}$$

   als Teilmenge von $\mathbb{A}^* = \{0, 1, \#\}^*$ rekursiv aufzählbar ist. Beschreiben Sie dazu präzise, wie die aufzählende Funktion $f : \mathbb{A}^* \to \mathbb{A}^*$ mit $f(\mathbb{A}^*) = H$ definiert ist, und begründen Sie, warum diese berechenbar ist.