Universität des Saarlandes
Fachbereich 14 – Informatik
Prof. Dr. G. Hotz / Dr. E. Schömer / T. Chadzelek

11. Übungsblatt Informatik III

(Abgabe: 27. Januar 1999)

1. **Aufgabe**: LANDAU-SYMBOLE (Punkte: 6)

Zur Angabe des asymptotischen Wachstums einer Funktion, die z.B. Laufzeit oder Speicherbedarf eines Programms beschreibt, bedient man sich oft der LANDAU-Symbole. Sei dazu $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto f(x)$ eine solche Funktion, dann sind

$$O(f) := \{g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto g(x) \mid \exists\, M \in \mathbb{R} :\ g(x) < M \cdot f(x) \text{ für } x \to \infty\}$$

und $o(f) := \{g \mid \lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0\}$ Mengen von Funktionen, deren Wachstum nach oben beschränkt ist. Ferner sind $\Omega(f) := \{g \mid f \in O(g)\}$, $\omega(f) := \{g \mid f \in o(g)\}$ nach unten beschränkte und $\Theta(f) := O(f) \cap \Omega(f)$ asymptotisch scharf beschränkte Mengen. Man identifiziert nun eine Funktion f meist mit dem sie definierenden Term $f(x)$ und schreibt an Stelle von $g \in O(f)$ gerne $g = O(f)$.

(a) Zeigen Sie:
   i. $3x + 17 = O(x^2)$
   ii. $3x + 17 = o(x^2)$
   iii. $3x + 17 \neq \Theta(x^2)$

(b) Ordnen Sie die folgenden Funktionen aufsteigend nach ihrem asymptotischen Wachstum an:
$x + 2,\ x!,\ 3\ln x,\ 0.1x^2,\ (\frac{x}{e})^x,\ 100x\ln x,\ e^x$.

2. **Aufgabe**: TURINGMASCHINEN (Punkte: 14)

TM können Funktionen $f^{(k,l)} : \mathbb{N}^k \rightsquigarrow \mathbb{N}^l$ berechnen (vgl. Vorlesung); als Alphabet genügt dazu $A := \{0, 1, \#, \llcorner\!\lrcorner\}$. Nun soll gezeigt werden, daß alle μ-rekursiven Funktionen turingberechenbar sind. O.B.d.A. kann man stets annehmen, daß eine gegebene TM nur ein Band verwendet; das Ergebnis Ihrer Konstruktionen läßt sich oft jedoch leichter als Mehrbandmaschine beschreiben.

(a) Geben Sie minimale Turingtafeln für die *Identität* $1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die *nullstellige Konstante Null* $c_0 : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ und die *Projektion* $p_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^0$ an.

(b) Geben Sie 2-TM (mit Turingtafel!) für die *Diagonalisierung* $d_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ sowie die *Transposition* $T : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ an und bestimmen Sie deren Zeit- und Bandschranken. *Optional:* Beschränken Sie sich auf 1-TM.

(c) Zwei p.r. Funktionen seien durch 1-TM gegeben. Schildern Sie präzise, wie die *Komposition* $\circ$ und das *kartesische Produkt* $\times$ davon durch eine k-TM berechnet werden können.

(d) Auch das Schema der *primitiven Rekursion* kann nachgebildet werden. Nehmen Sie dazu an, daß 1-TM für $g : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{l+2} \to \mathbb{N}$ gegeben sind, und schildern Sie die Konstruktion einer k-TM für die resultierende Funktion $f : \mathbb{N}^{l+1} \to \mathbb{N}$. Zerlegen Sie das Problem in hinreichend simple(!) Basisoperationen (z.B. „Band i löschen"); verzichten Sie darauf, deren Turingtafeln anzugeben. Beschreiben Sie, wie diese zusammengesetzt werden (Flußdiagramm).

(e) Zum Abschluß soll zu gegebener 1-TM für $f : \mathbb{N}^{l+1} \to \mathbb{N}$ eine k-TM für $\mu F : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ konstruiert werden; verfahren Sie dazu wie bei der Rekursion.