Universität des Saarlandes
Fachbereich 14 – Informatik
Prof. Dr. G. Hotz / Dr. E. Schömer / T. Chadzelek

10. Übungsblatt Informatik III
(Abgabe: 20. Januar 1999)

1. **Aufgabe**: μ-OPERATOR (Punkte: 4)

   Zu einer Funktion $\mathbb{P} \ni f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ sei $D := \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^k \mid \exists y \in \mathbb{N} : f(\mathbf{x}, y) = 0\}$ der Definitionsbereich von $\mu f : \mathbb{N}^k \supseteq D \to \mathbb{N}$, $(\mu f)(\mathbf{x}) := \min\{y \in \mathbb{N} \mid f(\mathbf{x}, y) = 0\}$.

   (a) Es ist μf berechenbar, falls $f \in \mathbb{P}$ liegt. Erinnern Sie sich dazu, warum jede p.r. Funktion total ist und wie μf für Argumente $\mathbf{x} \in D$ berechnet werden kann, falls f *total* ist. An welcher Stelle geht diese Voraussetzung ein?

   (b) Verallgemeinern Sie nun den μ-Operator auf berechenbare *partielle* Funktionen f. Wie wird D eingeschränkt, damit μf im intuitiven Sinne berechenbar bleibt?

2. **Aufgabe**: BESCHRÄNKTER μ-OPERATOR (Punkte: 8)

   Der beschränkte μ-Operator $\mu_b : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ bildet eine p.r. Funktion $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ ab auf $\mu_b f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ mit

   $$(\mu_b f)(\mathbf{x}, z) := \begin{cases} \min\{y \in [0 : z] \mid f(\mathbf{x}, y) = 0\} & \text{falls existent;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) Zeigen Sie, daß $\mu_b f \in \mathbb{P}$.

   (b) Verwenden Sie diesen Operator, um p.r. Funktionen für Division und ggT anzugeben.

   (c) Ist die folgende Funktion p.r.? $\mathtt{prim} : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$, $\mathtt{prim}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ Primzahl;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

   (d) Können Sie eine p.r. Funktion $\mathtt{pr} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ angeben, so daß $\mathtt{pr}(i)$ die i. Primzahl ist? Aus technischen Gründen wollen wir die Reihe mit $0, 1, 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ beginnen.

3. **Aufgabe**: STANDARDREDUKTIONEN (Punkte: 6)

   In Aufgabe 2, Blatt 9, wurde gezeigt, daß $\mathbb{N}^k$ abzählbar ist. Nun sollen Sie beweisen, daß die Bijektionen $b_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und ihre Umkehrungen $b_{k,i} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $b_{k,i} \circ b_k = p_i^k$ (Projektion auf i. Komponente) primitiv rekursiv sind. Dabei sei $b_2(x_1, x_2) := \binom{x_1 + x_2 + 1}{2} + x_2$.

   (a) Wie kann man $\binom{n}{k}$ p.r. berechnen? *Optional:* Können Sie ein Verfahren finden, bei dem kein Zwischenergebnis größer ist als das Maximum aus Resultat und Eingaben?

   (b) Zeigen Sie: $b_2 \in \mathbb{P}$ und b_2 ist bijektiv.

   (c) Wie sehen die Umkehrungen $b_{2,1}, b_{2,2}$ aus? Beweisen Sie, daß diese auch p.r. sind.

   (d) Folgern Sie nun induktiv die gewünschte Aussage.

4. **Aufgabe**: PUMPING-LEMMA (Punkte: 2)

   Erinnern Sie sich an die Aufgabe 2 von Blatt 8 mit der verschärften Fassung des Pumping-Lemmas ($|xy| \leq n_L$) und $L_2 := \{v\bar{v}w \mid v, w \in \mathbb{B}^+\}$.

   (a) Zeigen Sie, daß $L := L_2$ z.B. mit $n_L := 3$ das Pumping-Lemma erfüllt und meine Aufgabenstellung daher falsch war! Sie müssen also nachweisen, daß für jedes Wort in L eine geeignete Zerlegung existiert, die beliebig gepumpt werden kann (einschließlich $k = 0$). *Hinweis:* Meist genügt die kürzeste Wahl von x und y.

   (b) Beweisen Sie, daß L_2 dennoch nichtregulär ist. *Hinweis:* Wieviele Rechtskongruenzklassen gibt es?