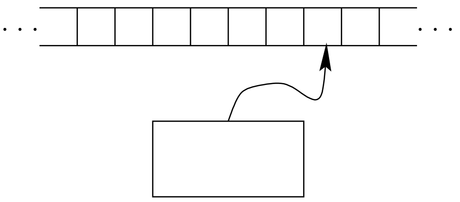
Turingmaschinen

Bildliche Darstellung



- unbegrenztes Band
- Schreib-/Lesekopf
- endliche Kontrolle

Definition: Eine (nichtdeterministische) *Turingmaschine* (TM) wird spezifiziert durch $\mathcal{M} = (Z, A, \delta, z_0)$, wobei

- Z endliche *Zustandsmenge*;
- $A \supset \{0, 1, \#, \sqcup\}$ *Alphabet* mit $Z \cap A = \emptyset$;
- $\delta \subset Z \times A \times Z \times A \times \{\mathtt{L}, \mathtt{N}, \mathtt{R}\}$ *Übergangsrelation*;
- $z_0 \in Z$ *Anfangszustand*.

$\mathcal{M}$ heißt *deterministisch*, falls $\delta : Z \times A \rightsquigarrow Z \times A \times \{\mathtt{L}, \mathtt{N}, \mathtt{R}\}$ eine (partielle) Funktion ist.

Konfigurationen

Mit $K_{\mathcal{M}} := A^* \cdot Z \cdot A^*$ bezeichnen wir die *Konfigurationen* von $\mathcal{M}$.

Wir definieren eine *Übergangsrelation* $\vdash$ auf Konfigurationen wie folgt, wobei $u, v \in A^*$, $a, b, a' \in A$ und $z, z' \in Z$:

$$ubzav \vdash \begin{cases} uz'ba'v & \text{falls } (z, a, z', a', \mathtt{L}) \in \delta; \\ ubz'a'v & \text{falls } (z, a, z', a', \mathtt{N}) \in \delta; \\ uba'z'v & \text{falls } (z, a, z', a', \mathtt{R}) \in \delta. \end{cases}$$

$$zav \vdash \begin{cases} z' \sqcup a'v & \text{falls } (z, a, z', a', \mathtt{L}) \in \delta; \\ z'a'v & \text{falls } (z, a, z', a', \mathtt{N}) \in \delta; \\ a'z'v & \text{falls } (z, a, z', a', \mathtt{R}) \in \delta. \end{cases}$$

$$ubz \vdash \begin{cases} uz'ba' & \text{falls } (z, \sqcup, z', a', \mathtt{L}) \in \delta; \\ ubz'a' & \text{falls } (z, \sqcup, z', a', \mathtt{N}) \in \delta; \\ uba'z' & \text{falls } (z, \sqcup, z', a', \mathtt{R}) \in \delta. \end{cases}$$

$$z \vdash \begin{cases} z' \sqcup a' & \text{falls } (z, \sqcup, z', a', \mathtt{L}) \in \delta; \\ z'a' & \text{falls } (z, \sqcup, z', a', \mathtt{N}) \in \delta; \\ a'z' & \text{falls } (z, \sqcup, z', a', \mathtt{R}) \in \delta. \end{cases}$$

Berechnungen

Eine Folge $(k_0, \ldots, k_T) \in K^*_{\mathcal{M}}$ heißt eine *endliche Rechnung von* $\mathcal{M}$ *angesetzt auf* $w \in A^*$ ($\mathcal{M}$ angesetzt auf w *hält*), falls

i. $k_0 \in \sqcup^* z_0 w \sqcup^*$;

ii. $\forall\, 0 \leq i < T: \ k_i \vdash k_{i+1}$;

iii. $\nexists\, k \in K_{\mathcal{M}}: \ k_T \vdash k'$.

Eine Folge $(k_0, k_1, \ldots) \in K^\omega_{\mathcal{M}}$ heißt eine *unendliche Rechnung von* $\mathcal{M}$ *angesetzt auf* $w \in A^*$ ($\mathcal{M}$ angesetzt auf w *hält nicht*), falls i. und ii. sinngemäß erfüllt sind. Ist $k_0 = z_0 w$, so heißen diese Rechnungen *kanonisch*.

Sei nun $\mathcal{M}$ *deterministisch*. $time(w) := T$ heißt die *Länge* der endlichen Rechnung. Für kanonische Rechnungen erklären wir den *Bandverbrauch* als

$$space(w) := \max\{|k_i| - 1\}.$$

Sei $f : \mathbb{N} \supset D \to \mathbb{N}$ und $w \in A^*$ beliebig mit $|w| \in D$. $\mathcal{M}$ heißt *f-zeitbeschränkt* bzw. *f-bandbeschränkt*, falls stets $time(w) \leq f(|w|)$ bzw. $space(w) \leq f(|w|)$.

Beispiel (binäres Zählen):

- rechtes Ende suchen (z_0);
- Eins addieren (z_1);
- linkes Ende suchen (z_2);
- fertig (z_3).

(z', a', r)	0	1	$\sqcup$
z_0	$(z_0, 0, \mathtt{R})$	$(z_0, 1, \mathtt{R})$	$(z_1, \sqcup, \mathtt{L})$
z_1	$(z_2, 1, \mathtt{L})$	$(z_1, 0, \mathtt{L})$	$(z_3, 1, \mathtt{N})$
z_2	$(z_2, 0, \mathtt{L})$	$(z_2, 1, \mathtt{L})$	$(z_3, \sqcup, \mathtt{R})$

Kanonische Rechnung angesetzt auf 101 ist

$$\begin{array}{ccccccc} z_0 101 & \vdash & 1 z_0 01 & \vdash & 10 z_0 1 & \vdash \\ 101 z_0 & \vdash & 10 z_1 1 \sqcup & \vdash & 1 z_1 00 \sqcup & \vdash \\ z_2 110 \sqcup & \vdash & z_2 \sqcup 110 \sqcup & \vdash & \sqcup z_3 110 \sqcup & \end{array}$$

mit Länge $time(101) = 8$ und Bandverbrauch $space(101) = 5$. $\mathcal{M}$ ist $(2n + 2)$-zeitbeschränkt und $(n + 2)$-bandbeschränkt.

Mehrband-Turingmaschinen

Definition: Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine (nichtdeterministische) *k-Band-Turingmaschine* (k-TM) wird spezifiziert durch $\mathcal{M} = (Z, A, \delta, z_0)$ ähnlich wie zuvor, aber mit

$$\delta \subset Z \times A^k \times Z \times A^k \times \{\mathtt{L}, \mathtt{N}, \mathtt{R}\}^k$$

bzw. – im deterministischen Fall –

$$\delta : Z \times A^k \rightsquigarrow Z \times A^k \times \{\mathtt{L}, \mathtt{N}, \mathtt{R}\}^k.$$

Die Konfigurationsmenge ist

$$K_{\mathcal{M}} := \bigcup_{z \in Z} (A^* z A^*)^k.$$

Die Übergangsrelation $\vdash$ und Berechnungen ergeben sich analog. Den Bandverbrauch messen wir als Summe über die einzelnen Bänder.

Maschinenfunktion über $\mathcal{A}^*$

Sei $\mathcal{A} := A \setminus \{\sqcup\}$ und $h : A^* \to \mathcal{A}^*$ der Homomorphismus, der alle $\sqcup$ löscht.

Falls die 1-TM $\mathcal{M}$ angesetzt auf $w \in \mathcal{A}^*$ hält und $(k_0, \ldots, k_T)$ die zugehörige kanonische Rechnung ist mit $k_T = uzv$, so setzen wir $f_{\mathcal{M}}(w) := h(uv)$. Dies definiert in natürlicher Weise eine Funktion $f_{\mathcal{M}} : \mathcal{A}^* \rightsquigarrow \mathcal{A}^*$.

k-TMs $\mathcal{M}$ definieren eine ebensolche Funktion $f_{\mathcal{M}}$, wobei für Ein- und Ausgaben das erste Band benutzt wird.

Einseitiges Band

Lemma: Sei $t(n) \geq n$ und $\mathcal{M}$ sei eine $s(n)$-band- und $t(n)$-zeitbeschränkte 1-TM, deren Ausgabe keine Felder links von der Startposition der Köpfe belegt. Dann gibt es eine äquivalente $(s(n)+1)$-band- und $O(t(n))$-zeitbeschränkte TM $\mathcal{M}'$, die nie Felder links von der Startposition der Köpfe benutzt. Dies gilt analog für k-TM.

Beweis: Sei $\mathcal{M} = (Z, A, \delta, \zeta)$; numeriere Bandzellen über $\mathbb{Z}$, wobei der Kopf auf Position 0 startet. Sei $\diamond \notin A$ und $A' := A \cup A \times (A \cup \{\diamond\})$ sowie $\zeta_i \notin Z$ und $Z' := Z \times \{\top, \bot\} \cup \{\zeta_i \mid 0 \leq i \leq 3\}$.

Idee:

$\cdots$ $\sqcup$	w_{-s}	$\cdots$	w_{-1}	w_0	w_1	$\cdots$	w_s	$\sqcup$ $\cdots$

$$\Downarrow$$

w_0	w_1	$\ldots$	w_s	$\sqcup$ $\ldots$
$\diamond$	w_{-1}	$\ldots$	w_{-s}	

Neuer Anfangszustand sei ζ_0; wir vereinbaren $\bar{\mathtt{L}} := \mathtt{R}$, $\bar{\mathtt{N}} := \mathtt{N}$ und $\bar{\mathtt{R}} := \mathtt{L}$. Die übergangsrelation δ' enthält für beliebige $x, y \in A$ sowie $(z, a, z', a', r) \in \delta$

- $(\zeta', x, \zeta_\top, \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{\Diamond}, N)$;
- $(z_\perp, \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{\Diamond}, z_\top, \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{\Diamond}, \mathtt{N})$; $\begin{cases} (z_\top, \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{\Diamond}, z'_\top, \genfrac{}{}{0pt}{}{a'}{\Diamond}, r) & r \neq \mathtt{L}; \\ (z_\top, \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{\Diamond}, z'_\perp, \genfrac{}{}{0pt}{}{a'}{\Diamond}, \mathtt{R}) & r = \mathtt{L}. \end{cases}$
- $(z_\top, \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{x}, z'_\top, \genfrac{}{}{0pt}{}{a'}{x}, r)$; $(z_\perp, \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{a}, z'_\perp, \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{a'}, \bar{r})$;
- $(z_\top, a, z'_\top, \genfrac{}{}{0pt}{}{a'}{\sqcup}, r)$; $(z_\perp, x, z'_\perp, \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{a'}, \bar{r})$ für $a = \sqcup$;
- $(\zeta_1, \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}, \zeta_1, \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}, \mathtt{R})$; $(\zeta_1, x, \zeta_2, x, \mathtt{L})$;
- $(\zeta_2, \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}, \zeta_2, x, \mathtt{L})$; $(\zeta_2, \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{\Diamond}, \zeta_3, x, \mathtt{N})$;

und für alle $(z, a) \in Z \times A$ mit $\delta(z, a) = \emptyset$

- $(z_\top, \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{x}, \zeta_1, \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{x}, \mathtt{N})$; $(z_\top, a, \zeta_1, a, \mathtt{N})$;
- $(z_\perp, \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{a}, \zeta_1, \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{a}, \mathtt{N})$; $(z_\perp, x, \zeta_1, x, \mathtt{N})$ für $a = \sqcup$.

Einseitiges Band

Satz: Zu jeder k-TM $\mathcal{M}$ gibt es eine äquivalente k-TM $\mathcal{M}'$, die keine Felder links von der Startposition der Köpfe besucht. Ist $t(n) \geq n$ und $\mathcal{M}$ $s(n)$-band- und $t(n)$-zeitbeschränkt, so ist $\mathcal{M}'$ $O(s(n))$-band- und $O(t(n) + \delta_{k,1}(s(n))^2)$-zeitbeschränkt.

Beweis: Es gibt eine zu $\mathcal{M}$ äquivalente k-TM $\mathcal{M}''$, deren Ausgabe keine Felder links von der Startposition der Köpfe belegt.

Idee: Teile jedes Band in zwei Spuren, markiere die Startpositionen durch $\diamond$, simuliere $\mathcal{M}$ auf den oberen Spuren (analog zu vorhin, aber ohne Faltung). Verschiebe am Schluß die obere Spur nach rechts, damit keine Felder links von der Startposition der Köpfe belegt sind, und beseitige die Einteilung in Spuren.

Das Verschieben der Bandinschrift der Größe $s(n)$ dauert auf einer 1-TM quadratische und sonst lineare Zeit.

Normalform

Lemma: Sei $\mathcal{M}$ eine k-TM. Dann kann man o.B.d.A. annehmen, daß endliche Berechnungen stets in zwei Phasen verlaufen, so daß

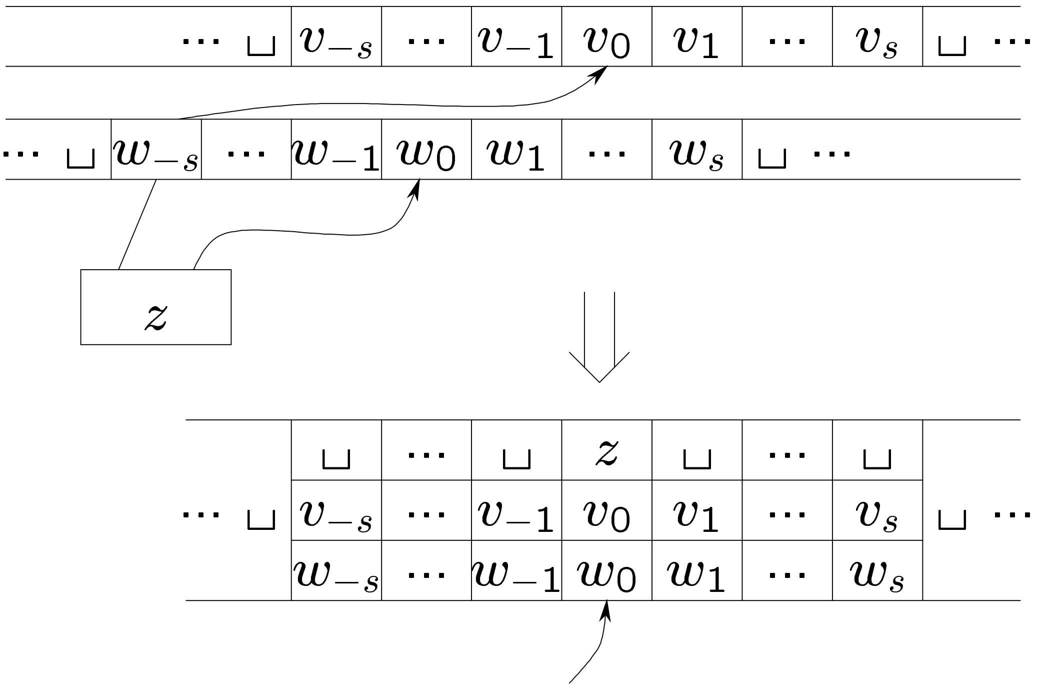
- $\mathcal{M}$ in der ersten Phase kein $\sqcup$ druckt;
- die Köpfe auf allen Bändern am Ende jeder Phase wieder am linken Rand der Bandinschrift stehen.

Beweis: Wenn $\mathcal{M}$ nicht diese Eigenschaften hat, dann führt man das neue Zeichen $\Box$ ein; dieses wird wie $\sqcup$ gelesen und anstelle von $\sqcup$ geschrieben. Sodann führt man neue Übergänge für alle $(z, a) \in Z \times A$ ein, für die $\delta(z, a)$ undefiniert bzw. leer ist. Diese führen zu einem neuen Programmteil, der zunächst alle Köpfe nach links fährt bis zu einem $\sqcup$; damit endet die erste Phase. Dann wird nach rechts das erste $\sqcup$ gesucht und auf dem Rückweg werden alle $\Box$ durch $\sqcup$ ersetzt; damit endet die zweite Phase.

Bandreduktion

Satz: Zu jeder $s(n)$-band- und $t(n)$-zeitbeschränkten k-TM $\mathcal{M}$ gibt es eine äquivalente 1-TM $\mathcal{M}'$, die $O(s(n))$-band- und $O(s(n) \cdot t(n))$-zeitbeschränkt ist.

Idee: Numeriere die Bandzellen über $\mathbb{Z}$ relativ zur *aktuellen* Kopfposition.



Maschinenfunktion über $\mathbb{N}$

$bin : \mathbb{N} \to \mathbb{B}^+$ bilde n ab auf die zugehörige Binärdarstellung ohne führende Nullen; bin ist injektiv mit Umkehrung

$$bin^{-1} : \mathbb{B}^+ \to \mathbb{N},\ w = w_1 \dots w_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} w_i 2^{n-i}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir bin fort zu $bin_k : \mathbb{N}^k \to \{0, 1, \#\}^*$ durch

$$bin_k(x_1, \dots, x_k) := bin(x_1)\# \dots \#bin(x_k).$$

Die Umkehrung $bin_k^{-1} : \{0, 1, \#\}^* \rightsquigarrow \mathbb{N}^k$ ist partiell, da sie nur für Wörter der Form $bin(x_1)\# \dots \#bin(x_k)$ definiert ist.

Analog zu $f_{\mathcal{M}}$ definiert man jetzt $k, l \in \mathbb{N}$ Funktionen $f_{\mathcal{M}}^{(k,l)} : \mathbb{N}^k \rightsquigarrow \mathbb{N}^l$ durch

$$f_{\mathcal{M}}^{(k,l)} := bin_l^{-1} \circ f_{\mathcal{M}} \circ bin_k.$$

Turingberechenbare Funktionen

Definition: Eine Funktion $f : \mathcal{A}^* \rightsquigarrow \mathcal{A}^*$ bzw. $f : \mathbb{N}^k \rightsquigarrow \mathbb{N}^l$ heißt *turingberechenbar*, falls es eine TM $\mathcal{M}$ gibt mit $f = f_{\mathcal{M}}$ bzw. $f = f_{\mathcal{M}}^{(k,l)}$.

Satz: Die Menge der turingberechenbaren Funktionen $\mathbb{N}^k \rightsquigarrow \mathbb{N}^l$ ist genau die Menge der μ-rekursiven Funktionen $\mathbb{N}^k \rightsquigarrow \mathbb{N}^l$.