Definition: $f : D \subset \mathbb{N}^k \longrightarrow D' \subset \mathbb{N}^j$ heißt μ-**rekursiv** $:\Longleftrightarrow$ f läßt sich aus den Basisfunktionen E durch endlich häufige Anwendung der

- Kompositionsschemata „$\circ$“ und „$\times$“,
- des Schemas der **primitiven Rekursion** und
- des μ-**Operators**

erzeugen.

- Es gibt eine μ-rekursive Funktion $g : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}^j$ mit $g(\mathbb{N}^k) = D'$.

Wir bezeichnen die Menge der μ-rekursiven Funktion durch $\mu\mathbb{P}$.

Definition: $D \subset \mathbb{N}^k$ heißt rekursiv **aufzählbar** $:\Longleftrightarrow$ Es gibt eine μ-rekursive Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^k$ mit $f(\mathbb{N}) = D$.

Definition: Ist $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ μ-rekursiv, dann heißt

$$R_f := \{\alpha \in \mathbb{N}^k \mid f(\alpha) = 0\}$$

μ-rekursive Relation.

Wir werden später beweisen, daß der folgende Satz gilt.

Satz: D ist genau dann eine μ-rekursive Relation, wenn D rekursiv aufzählbar ist.

Wir zeigen, daß die Menge der μ-rekursiven Funktionen in gewissem Sinne unvollständig ist. Da die hierbei verwendeten Konstruktionen nur zum Teil vom Begriff der Berechenbarkeit abhängen, geben wir ihnen eine allgemeine Fassung.

Wir gehen von der Menge

$$\mathfrak{F} := \{f : D \longrightarrow D' \mid D \subset \mathbb{N}^k, D' \subset \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$$

von Abbildungen aus. Mit Hilfe der Standardreduktion können wir $\mathfrak{F}$ auf

$$\mathfrak{F}_i := \{f : D \longrightarrow D' \mid D \subset \mathbb{N}^k, D' \subset \mathbb{N}, k \leq i\}$$

reduzieren. Mit $\mathfrak{a}_i$ bezeichnen wir abzählbare Teilmengen von $\mathfrak{F}_i$. Es bezeichnet

$$\gamma_i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{a}_i$$

eine Abzählung, d. h. γ_i ist eine surjektive Abbildung. Wir wollen weiter voraussetzen, daß sich $\mathfrak{a}_i$ aus $\mathfrak{a}_{i+1}$ durch eine Standardreduktion erhalten läßt und daß diese Standardreduktionen γ_{i+1} in γ_i überführen.

Erläuterung:

$$(x_1, \ldots, x_k) \longrightarrow (x_1, \ldots, x_{k-2}, b_2^{-1}(x_{k-1}, x_k))$$

ist eine Standardreduktion von $\mathbb{N}^k$ auf $\mathbb{N}^{k-1}$.

Ist $f \in \mathfrak{a}_k$ und $\gamma_k(n) = f$, dann sei

$$\gamma_{k-1}(n) = \gamma_k(n)(x_1, \ldots, x_{k-2}, b_2^{-1}(x_{k-1}, x_k)).$$

Sei nun

$$D_n^1 := \{x \in \mathbb{N} \mid \gamma_1(n)(x) = 0\}.$$

D_n^1 ist also die Menge der Nullstellen der Funktion $\gamma_1(n)$. Wir definieren für $(n, x) \in \mathbb{N}^2$

$$e(n, x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in D_n^1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun setzen wir

$$\tilde{e}(n) := e(n, n).$$

Da e total ist, gilt das auch für $\tilde{e}$.

Lemma: $\tilde{e} \notin \mathfrak{a}_1$.

Beweis: Nehmen wir $\tilde{e} \in \mathfrak{a}_1$ an, dann folgt, daß es ein $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ gibt mit $\gamma(\tilde{n}) = \tilde{e}$.

Fallunterscheidung:

(1) $\tilde{e}(\tilde{n}) = 1 \Rightarrow \tilde{n} \in D_{\tilde{n}} \Rightarrow \gamma_1(\tilde{n})(\tilde{n}) = 0$
Nun ist aber

$$\gamma_1(\tilde{n})(\tilde{n}) = \tilde{e}(\tilde{n}).$$

Widerspruch!

(2) $\tilde{e}(\tilde{n}) = 0 \Rightarrow \tilde{n} \notin D_{\tilde{n}} \Rightarrow \tilde{e}(\tilde{n}) \neq 0$.
Widerspruch!

Sei nun

$$\tilde{u}(n,x) := \begin{cases} \gamma_1(n)(x) & \text{für } x \in Q(\gamma_1(n)) \\ 1 & \text{für } x \notin Q(\gamma_1(n)). \end{cases}$$

Es ist offensichtlich

$$e(n,x) = \overline{sig}(\tilde{u}(n,x)),$$

worin $\overline{sig} := 1 \dot{-} sig$ ist.

Hieraus folgt das

Korollar 1: Ist $\mathfrak{a}_2$ abgeschlossen unter „$\circ$“ und Diagonalisierung und enthält $\mathfrak{a}_2$ die Funktion $\overline{sig}$, dann ist $\tilde{u} \notin \mathfrak{a}_2$.

Korollar 2: Liegt

$$u(n,x) := \begin{cases} \gamma_1(n)(x) \text{ für } x \in Q(\gamma_1(n)), n \in \mathbb{N} \\ \text{nicht definiert sonst} \end{cases}$$

in $\mathfrak{a}_2$, dann gibt es unter den Voraussetzungen von Korollar 1 keine Fortsetzung von u mit Werten ≥ 1 zu einer totalen Funktion $\tilde{u} \in \mathfrak{a}_2$.

Definition: Die oben definierte Funktion u heißt universell in $\mathfrak{a}$.

Diese Bezeichnung ist gerechtfertigt,da es zu jeder Funktion $f \in \mathfrak{a}_1$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$f(x) = u(n,x)$$

ist. Jede in diesem Sinne universelle Funktion definiert natürlich eine Aufzählung. Vermittels der Standardreduktion läßt sich auch jede Funktion aus $\mathfrak{a}_2$ auf u reduzieren.

Das Korollar 2 besagt, daß es unter den Voraussetzungen von Korollar 1, daß $\mathfrak{a}_2$ abgeschlossen ist unter „$\circ$“ und daß $\overline{sig}$ in $\mathfrak{a}_2$ liegt, keine Fortsetzung universeller Funktionen $\tilde{u}$ gibt, so daß $\tilde{u} \in \mathfrak{a}_2$ gilt, wenn diese Fortsetzungen die Nullstellenmengen von u erhalten.

Wir wollen die Ergebnisse auf Mengen berechenbarer Funktionen übertragen.

Die Menge der berechenbaren Funktionen müssen wir als abzählbar ansehen. Die oben definierten Mengen von Abbildungen $\mathfrak{a}_i$ bezeichnen wir im Falle der Berechenbarkeit aller ihrer Elemente mit $\mathcal{B}_i$.

Satz 1: Ist $\mathcal{B}_2$ eine Menge berechenbarer totaler Funktionen und ergibt sich $\mathcal{B}_1$ durch eine Standardreduktion aus $\mathcal{B}_2$, und ist $\mathcal{B}_2$ abgeschlossen unter der Diagonalisierung und ist $\overline{sig} \in \mathcal{B}_1$, dann gibt es in $\mathcal{B}_2$ keine Funktion $e(n, x)$, die die Nullstellen-Mannigfaltigkeiten der Funktionen aus $\mathcal{B}_1$ entscheidet.

Beweis: Angenommen e wäre in $\mathcal{B}_2$, dann würde $\tilde{e} := e \circ d_1 \in \mathcal{B}_1$ folgen, was, wie Lemma 1 zeigt, nicht gilt.

Satz 2: Ist $\mathcal{B}_2$ abgeschlossen unter „$\circ$“ und Diagonalisierung und enthält $\mathcal{B}_2$ die Funktion $\overline{sig}$, dann liegt die Fortsetzung jeder universellen Funktion, die die Nullstellen-Mannigfaltigkeit von u erhält nicht in $\mathcal{B}_2$.

Beweis: Aus Korollar 1 ergibt sich, daß die spezielle Fortsetzung $\tilde{u}$ von u nicht in $\mathcal{B}_2$ liegt. Haben wir irgendeine Fortsetzung $\tilde{u}$, die $x \notin Q(\gamma(n))$ einen Wert $\neq 0$ zuweist, dann erhalten wir auch in diesem Fall

$$e(n, x) = \overline{sig}(\tilde{u}(n, x)).$$

Wir diskutieren diesen Satz für $\mathcal{B}_2 = \mathbb{P} \cap \mathfrak{F}_2$. $\mathbb{P}_2$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2. Wir erhalten

$$\tilde{u}(n, x) = \gamma_1(n)(x) \text{ für } x \in Q(\gamma_1(n)) = \mathbb{N}.$$

Also $\tilde{u}$ ist in diesem Fall eine totale Funktion. Unser Satz besagt, daß eine zu $\mathbb{P}_1$ universelle Funktion nicht in $\mathbb{P}_2$ liegt. Wenn es also eine universelle berechenbare Funktion zu $\mathbb{P}_1$ gibt, dann liegt sie nicht in $\mathbb{P}$.

Satz 3: Sei $\mu\mathbb{P}_2 = (\mu\mathbb{P}) \cap \mathfrak{F}_2$ die Menge der μ-rekursiven Funktionen höchstens zweier Variablen. Ist $u \in \mu\mathbb{P}_2$ und universell, dann ist u nicht total.

Beweis: Der Satz folgt unmittelbar aus Korollar 2.

Nach unserer Überzeugung läßt sich jede berechenbare Funktion auf einem Computer programmieren. Die Menge der Programme über $\mathbb{N}$ mit Ausgabe in $\mathbb{N}$ läßt sich leicht charakterisieren und also rekursiv aufzählen. Also läßt sich eine universelle Funktion $u(n, x)$ angeben, die berechenbar ist. Aus Korollar 2 folgt, daß $u(n, x)$ nicht total ist. Weiter ergibt sich, daß die charakteristische Funktion des Definitionsbereiches von u nicht berechenbar ist.

Wir haben also den

Satz 4: Die charakteristischen Funktionen der Definitionsbereiche der bezüglich $\mathcal{B}$ universeller berechenbarer Funktionen liegen **nicht** in $\mathcal{B}$.

Bemerkung: Die hier verwendeten Konstruktionen von Funktionen, die nicht in einem Bereich $\mathcal{B}$ liegen, kann man verwenden, um Hierarchien

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \subsetneq \mathcal{B}_2 \subsetneq \ldots$$

aufzubauen. Das geschieht, indem man die nicht in $\mathcal{B}_i$ liegende charakteristische Funktion χ_i zu $\mathcal{B}_i$ hinzunimmt und $\mathcal{B}_{i+1}$ als die Funktionsmenge definiert, die sich aus $\mathcal{B}_i \cup \{\chi_i\}$ unter Anwendung von „$\circ$“ und „$\times$“ erzeugen läßt.

Zunächst aber benötigen wir ein besseres Verständnis dessen, was Rechenmaschinen sind.