Sei für $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} & b_2(n,0) := \tbinom{n+1}{2} \\ \text{und} \quad & b_2(n,m) = b_2(n+m,0) + m. \end{aligned}$$

Damit ist (siehe Übungen)

$$b_2 : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$$

eine primitiv-rekursive Funktion.

Setzt man

$$s(x) := max\{i \in \mathbb{N} \mid \binom{i+1}{2} \leq x\}$$

und

$$\begin{aligned} b_{2,2}(x) &:= x - \binom{s(x)+1}{2}, \\ b_{2,1}(x) &:= s(x) - b_{2,2}(x), \end{aligned}$$

dann gilt (siehe Übungen)

$$[b_{2,1}, b_{2,2}] \circ b_2 = 1_{\mathbb{N}^2}, b_2 \circ [b_{2,1}, b_{2,2}] = 1_{\mathbb{N}}.$$

Es ist also

$$b_2^{-1} = [b_{2,1}, b_{2,2}].$$

Nun definieren wir für $k > 2$

$$b_k(x_1, \ldots, x_k) := b_2(x_1, b_{k-1}(x_2, \ldots, x_k))$$

und

$$b_{k,i}(x) := \begin{cases} b_{2,1}(x) & \text{für } i = 1, \\ b_{k-1,i-1}(b_{2,2}(x)) & \text{für } 2 \leq i \leq k. \end{cases}$$

Mittels Induktion zeigt man den

Satz: $b_k, b_{k,i} \in \mathbb{P}$ für $k \geq 2$ und $1 \leq i \leq k$.
Weiter gilt

$$b_k^{-1} = [b_{k,1}, \ldots, b_{k,k}].$$

Definition: $b_k, b_{k,1}, \ldots, b_{k,k}$ heißen Standardreduktionen von $\mathbb{N}^k$ auf $\mathbb{N}$.

Satz: Jede Abbildung

$$f : D \subset \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}^j$$

läßt sich mittels der Standardreduktionen auf eine Abbildung

$$\tilde{f} : \tilde{D} \subset \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

reduzieren. Es ist $f \in \mathbb{P} \iff \tilde{f} \in \mathbb{P}$.

Beweis: Setze

$$\tilde{f} := b_j \circ f \circ b_k^{-1}.$$

Es folgt

$$f := b_j^{-1} \circ \tilde{f} \circ b_k.$$

Korollar: Die Standardreduktionen führen primitiv-rekursive Relationen in primitiv-rekursive Relationen über.

Die angegebenen Reduktionen liegen alle in der Komplexitätsklasse E_1. Es gibt aber viele weitere primitiv-rekursive Reduktionen, d. h. Abbildungen $\beta : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $\beta, \beta^{-1} \in \mathbb{P}$.

Definition: Abbildungen f, g heißen primitiv-rekursiv äquivalent, wenn es primitiv-rekursive Reduktionen gibt, die f in g überführen. Entsprechend definiert man die primitiv-rekursive Äquivalenz von Relationen.

Die Standardreduktionen führen die Kategorie der primitiv-rekursiven Reduktionen in eine Gruppe $G_{\mathbb{P}}$ primitiv-rekursiver Abbildungen von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ über. Da die Standardreduktionen von niedriger Komplexität sind (sie liegen in E_1) wird bei dieser Reduktion die Komplexitätshierarchie der Reduktionen höchstens um 1 verschoben. Eine Untersuchung der Äquivalenzklassen unter $G_{\mathbb{P}}$ oder einer Untergruppe von $G_{\mathbb{P}}$ stellt eine Übertragung der Konzepte der Geometrie dar, wie sie im **Erlanger Programm** von Felix Klein formuliert wurde.

Die hier angedeutete Theorie wurde in Bezugnahme auf dieses Programm entwickelt. Die anschließend entwickelte Reduktionstheorie stellte den Komplexitätsaspekt betont in den Vordergrund. Da die Forderung, daß Reduktionen eine Gruppe bilden sollten, nicht gut mit dem Komplexitätsaspekt verträglich ist, hat man in der Weiterentwicklung der Reduktionstheorie die Gruppen aufgegeben und sich auf Kategorien bezogen, deren Elemente bestimmten Komplexitätsklassen angehören. Die bekannteste Klasse ist heute die Klasse der in Polynomialzeit berechenbaren Funktionen. Das berühmte Problem $P = NP$ ist in dem oben erläuterten Sinn ein geometrisches Problem. Wir können hier dieses Thema nicht weiter verfolgen.

Wir behandeln nun eine Erweiterung von $\mathbb{P}$, die auf dem Lösen von Gleichungssystemen beruht. Ist $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung, dann ist

$$R_f := \{\alpha \in \mathbb{N}^k \mid f(\alpha) = 0\} \subset \mathbb{N}^k$$

eine Relation. Nun kann man R_f auf verschiedene Weisen eine Funktion zuordnen. So setzen wir

$$\chi_f := \chi_{R_f}.$$

χ_f ist also die charakteristische Funktion von R_f. Ist f berechenbar, dann ist auch χ_f berechenbar, da $\chi_f = (1 - sig) \circ f$ gilt.

Nun interessieren wir uns für

$$\begin{aligned} D_f \;\; := \;\; \{\alpha' \in \mathbb{N}^{k-1} \mid \; & \text{Es gibt } \alpha_k \in \mathbb{N} \\ & \text{mit } (\alpha', \alpha_k) \in R_f\} \end{aligned}$$

und definieren $\tilde{f} : D_f \longrightarrow \mathbb{N}$ indem wir

$$\tilde{f}(\alpha') := min\{\alpha_k \mid (\alpha', \alpha_k) \in R_f\}.$$

Für $k \geq 1$ definieren wir den μ-Operator, indem wir

$$\mu f := \tilde{f}$$

setzen.

Für $k = 1$ erhalten wir die kleinste Nullstelle von f falls $R_f \neq \emptyset$ ist.

Ist f eine im intuitiven Sinne berechenbare Funktion und ist $\alpha' \in D_f$, dann läßt sich $\tilde{f}(\alpha')$ berechnen, indem man der Reihe nach die Folge

$$f(\alpha', 0), f(\alpha', 1), \ldots, f(\alpha', i), \ldots$$

berechnet. Diese Folge enthält die 0, da $\alpha' \in D_f$ ist. Ist i die erste Stelle mit $f(\alpha', i) = 0$, dann ist $\mu f(\alpha') = i$. (f ist total!)

Wissen wir allerdings nicht, ob $\alpha' \in D_f$ gilt, dann wird unsere Berechnung eventuell nicht abbrechen, so daß μf nur „partiell“ berechenbar ist. Können wir allerdings χ_{D_f} berechnen, dann können wir die nichtterminierenden Berechnungen vermeiden.