Annahme: $A(n,x)$ ist für alle x berechenbar. Nun gilt für alle n

$$A(n+1,0)=2$$

Nehmen wir an, daß $A(n+1,x)$ berechenbar ist, dann ergibt sich aus

$$A(n+1,x+1) := A(n,A(n+1,x))$$

und der Induktionsannahme über n, daß $A(n+1,x+1)$ berechenbar ist. Also ist $A(n+1,x)$ für alle x berechenbar. Also gilt das auch für alle n. Wir betrachten einige Beispiele:

$$A(1,x) = A(0,A(1,x-1)) = A(1,x-1)^2$$
$$= (A(1,x-2))^{2^2} = \ldots = A(1,0)^{2^x} = 2^{2^x}$$

$$\begin{aligned} A(2,x) &= A(1,A(2,x-1)) = 2^{2^{A(2,x-1)}} \\ &= 2^{2^{2^{2^{A(2,x-2)}}}} = 2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}} \Big\}\, 2x+1 \end{aligned}$$

Definition: Für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ schreiben wir

$$g \lesssim f :\Longleftrightarrow \forall^\infty x \in \mathbb{N}^k : |g(x)| \le f(|x|),$$

worin

$$|x| := x_1 + x_2 + \ldots + x_k \quad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k.$$

Lemma: $\mathcal{A}_n$ hat die folgenden Eigenschaften: 1) $A_{n+1}(0) = 2$ und $A_{n+1}(x+1) = (A_n \circ A_{n+1})(x)$,

2) $A_{n+1}(x) = (A_n^{(p)} \circ A_{n+1})(x-p)$,

3) $A_n(x+1) > A_n(x)$ für $x \in \mathbb{N}$,

4) $A_{n+1}(x) \ge 2^x$ für $x, n \in \mathbb{N}$,

5) $p \in \mathbb{N} : A_n^{(p)}(x) \le A_{n+1}(x)$ für $\forall^\infty x \in \mathbb{N}$

6) $p \in \mathbb{N} : A_n^{(p \cdot x)}(x) < A_{n+1}^2(x)$ für $\forall^\infty x \in \mathbb{N}$.

Beweis:

1) folgt unmittelbar aus der Definition von A.

2) folgt aus 1)

3) Man zeigt durch verschachtelte Induktion zusätzlich $A_n(x) > x + 1$.

Verankerung:

$$\begin{aligned} A_0(x) &= x^2 > x+1 \qquad \text{für } x > 1. \\ A_0(x+1) &= (x+1)^2 > x^2 = A_0(x). \end{aligned}$$

Induktionsschritt:

$$A_{n+1}(x+1) = A_n(A_{n+1}(x)).$$

Nehmen wir an

$$A_n(x+1) > A_n(x) > x+1,$$

dann folgt

$$A_{n+1}(x+1) > A_{n+1}(x) + 1 > A_{n+1}(x).$$

Nun ist

$$A_{n+1}(0) = 2 > 0 + 1.$$

Nehmen wir

$$A_{n+1}(x) > x + 1$$

an, dann folgt wegen

$$A_{n+1}(x+1) > A_{n+1}(x) + 1 > x + 2$$

die Behauptung für alle x. 4) $A_{n+1}(x) \geq 2^x$. Für $n = 0$ haben wir

$$A_1(x) = 2^{2^x} > 2^x$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} A_{n+1}(x+1) &= A_n(A_{n+1}(x)) \\ &> 2^{A_{n+1}(x)} > 2^{x+1} \quad \text{(nach 3)).} \end{aligned}$$

5) $A_{n+1}(x) = A_n^{(p+1)}(A_{n+1}(x \dot- p \dot- 1))$

$$\forall_x^\infty A_{n+1}(x \dot- p \dot- 1) \gtrsim 2^{x \dot- p \dot- 1} \gtrsim x.$$

Also

$$\begin{aligned} \forall_x^\infty A_{n+1}(x) &> A_n^{(p+1)}(x) = A_n(A_n^{(p)}(x)) \\ &> 2^{a_n^{(p)}(x)} > A_n^{(p)}(x). \end{aligned}$$

6) $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall^\infty x \in \mathbb{N}$

$$A_n^{(p \cdot x)} < A_{n+1}^2(x)$$

Beweis:

$A_{n+1}(A_{n+1}(x)) = A_n^{(p \cdot x)}(A_{n+1}(x \dot- p \cdot x)) > A_n^{(p \cdot x)}(x)$ nach 4).

Wir definieren eine Hierarchie von Funktionsklassen

$$E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset \mathbb{P}.$$

Hierbei verwenden wir die Notation

$$Pr(g,h) := f,$$

$$\iff \qquad \begin{array}{rcl} f \circ (1_k \times c_0) & = & g, \\ f \circ (1_k \times N) & = & h \circ (1_{k+1} \times f) \circ d_{k+1}. \end{array}$$

Wir setzen

$$B_0 := E \cup \{+, \cdot, \dot{-}\}$$

und

$$\begin{array}{rcl} E_0 & := & \langle B_0, \{\circ, \times\}\rangle \\ & = & \text{aus } B_0 \text{ mittels } \circ, \times \text{ erzeugte Menge} \\ & & \text{von Funktionen.} \end{array}$$

Nun definieren wir

$$\begin{array}{rcl} Pr(E_n) & := & \{f \mid \exists g, h \in E_n \text{ mit } f = Pr(g, \cdot h)\}, \\ B_{n+1} & := & E_n \cup Pr(E_n), \end{array}$$

und

$$E_{n+1} := \langle B_{n+1}, \{\circ, \times\}\rangle.$$

Offensichtlich gilt

$$E_n \subset E_{n+1} \text{ und } \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = \mathbb{P}.$$

$rek(f) := Min\{n \mid f \in E_n\}$ heißt Rekursionszahl von f.

Lemma: $A_n \in E_n$.

Beweis: Es gilt:

(1) $A_0 \in E_0$.
(2) $A_{n+1} \circ N = A_n \circ A_{n+1}$

Hieraus folgt induktiv

$$A_{n+1} \in E_{n+1}$$

Lemma: Zu allen $f \in E_n$ gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, so daß

$$|f| \lesssim A_n^{(p)}.$$

Beweis:

(1) $n = 0$

Die Elemente aus E_0 wachsen höchstens wie ein Polynom. Also gibt es $p \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_x^\infty |f(x)| \leq |x|^{2^p} = A_0^{(p)}(|x|)$$

nach Def. äquivalent mit

$$|f| \lesssim A_0^{(p)}.$$

(2) $n > 0$: Abschluß unter „$\circ$“ und „$\times$“.

Seien $f_1, f_2 \in E_n$ mit $Q(f_1) = Z(f_2)$

$$|f_1| \lesssim A_n^{(p)}, |f_2| \lesssim A_n^{(p)}.$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned} \forall_x^\infty |f_1 \circ f_2(x)| &\leq A_n^{(p)}(|f_2(x)|) \leq A^{(p)} \circ A^{(p)}(|x|) \\ &= A^{2p}(|x|) \\ |f_1 \times f_2| &= |f_1| + |f_2| \lesssim 2 \cdot A^{(p)} \end{aligned}$$

(3) $n \geq 0$: Anwendung der pr.-Rekursion. Seien $g, h \in E_n$,

$f(x, 0) = g(x), f(x, m+1) = h(x, m, f(x, m))$.

Wir betrachten die folgende Iteration:

$$it(x, n, y) := (x, n+1, h(x, n, y)).$$

Funktional geschrieben ergibt das

$$it = (1 \times N \times h) \circ (d_2 \times 1) \in E_n.$$

Nun setzen wir

$$\begin{aligned} \overline{it}(x, m, y, 0) &:= (x, m, y) \\ \overline{(}x, m, y, r+1) &:= it(\overline{it}(x, m, y, r)). \end{aligned}$$

Man sieht, daß jede Komponente von $\overline{it}$ in E_{n+1} liegt und also auch $\overline{it} \in E_{n+1}$ gilt. Die primitive Rekursionm kann also durch eine Iteration und eine Projektion dargestellt werden:

$$\overline{it}(x, 0, g(x), n) = (x, n, f(x, n)).$$

Beh.: $it \lesssim A_m^{(p)} \Rightarrow \overline{it} \lesssim A_{m+1}^{(q)}$ für geeignetes $q \in \mathbb{N}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} |\overline{it}(x,0,g(x),m)| &= |it^{(m)}(x,0,g(x))| \\ &= |it^{(m)} \circ (1_k, c_0, 1) \\ &\quad \circ (1_k \times g) \circ d_k| \\ &\lesssim a_n^{(p\cdot m)} \circ A_n^{(p')} = A_n^{(p\cdot m+p')}, \end{aligned}$$

worin p' so gewählt wurde, daß für $g \in E_n$

$$|g| \lesssim A_n^{(p')}$$

gilt.

Hieraus folgt:
Satz: $E_0, \subsetneq E_1, \subsetneq \ldots \subsetneq E_n \subsetneq \ldots$

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß $A_{n+1} \notin E_n$. Wir nehmen an, daß $A_{n+1} \in E_n$ gilt. Da E_n unter $\{\circ, \times\}$ abgeschlossen ist, folgt $A_{n+1}^{(p)} \in E_n$ für $p \in \mathbb{N}$.

Nun gilt nach dem vorigen Lemma, Punkt 6)

$$A_{n+1}^{(p\cdot x)}(x) \lesssim A_{n+1}^{(2)}(x) \qquad (*)$$

und nach Punkt 4)

$$A_{n+1}(x) \gtrsim 2^x,$$

so daß

$$A_{n+1} \circ A_{n+1}^{(m)} \gtrsim A_{n+1}^{(m)},$$

d. h.

$$A_{n+1}^{(p\cdot x)}(x) \gtrsim A_{n+1}^{(p)}(x) \gtrsim A_{n+1}^{(2)}(x),$$

was zusammen mit $(*)$ zum Widerspruch führt. Also ist die Annahme $A_{n+1} \in E_n$ falsch.

Satz (Ackermann): $A \notin \mathbb{P}$.

Beweis: $A \in \mathbb{P} \Rightarrow \exists_n A \in E_n$

$$\Rightarrow A_{n+1} = A \circ (c_{n+1} \times 1) \in E_n.$$

Wir haben aber gezeigt, daß $A_{n+1} \notin E_n$ gilt.