Primitiv-rekursive Relationen

Sei $R \in \mathbb{N}^k$ und $\chi_R : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sei definiert durch

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in R, \\ 0 & \text{für } x \notin R. \end{cases}$$

χ_R heißt die charakteristische Funktion von R.

Definition: R heißt **primitiv-rekursive Relation** $:\iff \chi_R \in \mathbb{P}$.

Lemma: Sind $R_1, R_2 \subset \mathbb{N}^k$ prim.-rek. Relationen, dann sind auch

$$R_1 \cup R_2,\ R_1 \cap R_2,\ \overline{R}_1 := \mathbb{N}^k - R_1$$

prim.-rek. Relationen.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß die zu diesen Mengen gehörigen charakteristischen Funktionen prim.-rek. sind.

Man erkennt

$$\begin{aligned} \chi_{R_1 \cup R_2} &= sg \circ (\chi_{R_1} + \chi_{R_2}) \circ d_k \\ \chi_{R_1 \cap R_2} &= ((\chi_{R_1} + \chi_{R_2}) \dot{-} 1) \circ d_k \\ \chi_{\overline{R}_1} &= 1 \dot{-} \chi_{R_1}. \end{aligned}$$

Lemma: Ist für $\lambda \in \{<, >, \leq, \geq, =\}$

$$R_\lambda := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x\lambda y\},$$

dann ist $\chi_{R_\lambda} \in \mathbb{P}$.

Beweis:...

Definition durch Fallunterscheidung

Seien $R_i \subset \mathbb{N}^k$ für $i = 1, \ldots, n$ prim.-rek. Relationen und $f_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ für $i = 1, \ldots, n$ aus $\mathbb{P}$. Weiter gelte $R_i \cap R_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Lemma: Die durch

$$g(x) := \begin{cases} f_i(x) & \text{für } x \in R_i (i = 1, \ldots, n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Abbildung $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ liegt in $\mathbb{P}$.

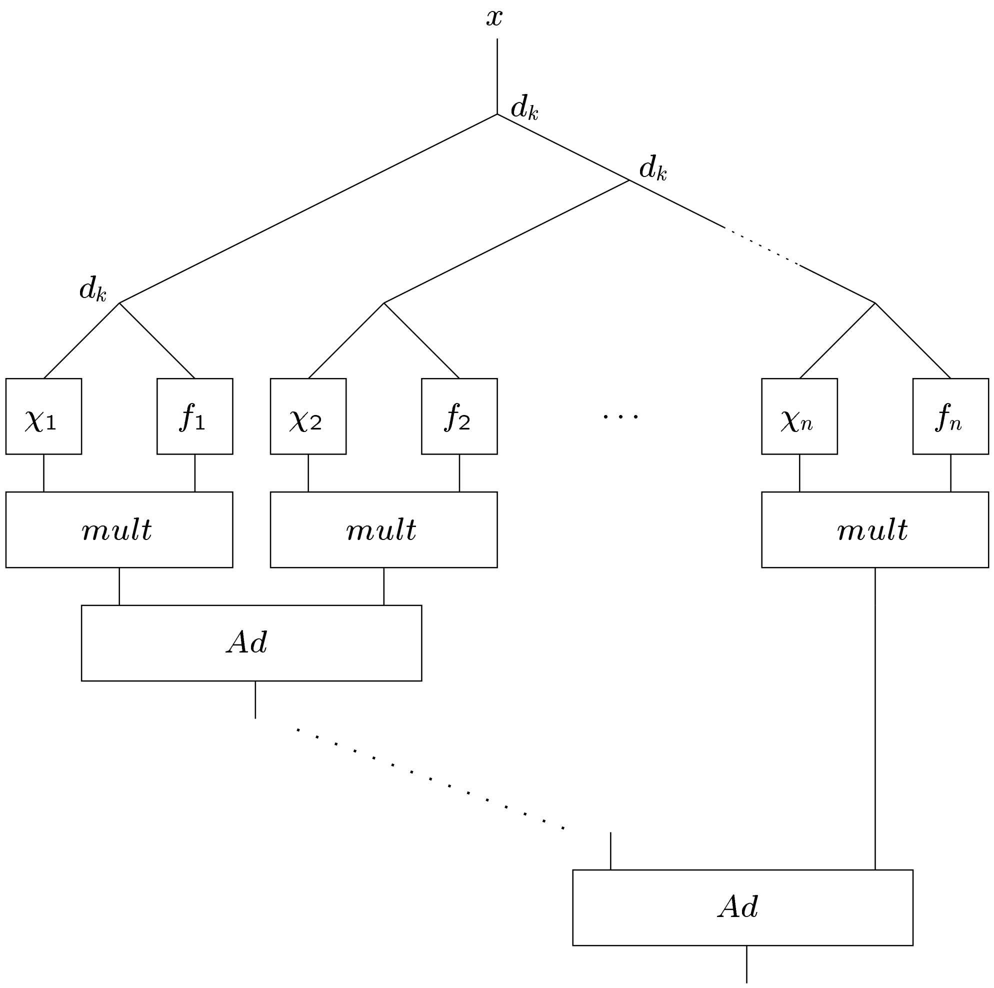
Beweis: Sei x_i die zu R_i gehörige prim.-rek. Funktion. Wegen $R_i \cap R_j = \emptyset$ für $i \neq j$ ist

$$\chi_1(x) + \ldots + \chi_n(x) \leq 1,$$

dann gilt

$$g(x) = \chi_1(x) \cdot f_1(x) + \cdots + \chi_n(x) \cdot f_n(x).$$

Wir geben eine funktionale Darstellung von g durch das folgende Diagramm an.



Die Ackermann'sche Funktion

Auf Hilberts Anregung konstruierte Ackermann 1928 eine rekursiv definierte Funktion, die nicht in $\mathbb{P}$ liegt.

Wir schildern zunächst die Idee dieser Konstruktion. Man konstruiere eine Folge von primitiv-rekursiven Funktionen

$$f_1, f_2, \ldots \qquad\qquad , \; f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

von der f_{i+1} durch das Schema der primitiven Rekursion aus f_i erzeugt wird. Somit steigt die Rekursionstiefe, die zur Definition der Folge verwendet wird, streng monoton mit i an. Betrachtet man nun

$$F(n,x) := f_n(x) \quad \text{für } x, n, \in \mathbb{N},$$

dann haben wir zur Definition von F beliebig tiefe primitive Rekursionen verwendet. Also sollte i. a. F nicht in $\mathbb{P}$ liegen.

Sei $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aus $\mathbb{P}$. Wir definieren

$$F_1(n,x) := f_1^{(n)}(x) := f_1(f_1^{(n-1)}(x));$$
$$f_1^{(0)}(x) := x, f_1^{(1)}(x) = f_1(x).$$

Nun setzen wir

$$f_2(x) := F_1(x,x).$$

F_1 ist primitiv-rekursiv, da F_1 durch das prim.-rek. Schema

$$\begin{aligned} F_1 \circ (c_0 \times 1) &= f_1 \\ F_1 \circ (N \times 1) &= f_1 \circ F_1 \end{aligned}$$

definiert wird. Weiter gilt

$$f_2 = F_1 \circ d_1.$$

Also ist $f_2 \in \mathbb{P}$.

Wir definieren den Operator Pr durch

$$Pr(f_1) := f_2.$$

Nun iterieren wir die Anwendung von Pr und erhalten die Folge

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_i \cdots$$

mit $f_{i+1} := Pr(f_i)$ für $i = 1, 2, \dots$.

Nun setzen wir

$$F(n, x) := f_n(x)$$

und definieren

$$\mathcal{A}(f_1) := F.$$

$\mathcal{A}$ bezeichnen wir als Ackermannoperator.

Die Anwendung von $\mathcal{A}$ auf f_1 enthält ∞-viele Diagonalisierungen und primitiv-rekursive Definitionen. $F(n, x)$ kann aber durch endlich viele Rechenschritte bestimmt werden. Also erzeugt $\mathcal{A}$ aus berechenbaren Funktionen wieder berechenbare Funktionen.

Wir betrachten die Wirkung von $\mathcal{A}$ auf die Nachfolgerfunktion N. Sei also $f_1 = N$.

Wir erhalten

$$F_1(n,x) = N^{(n)}(x) = n + x$$

und

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 2 \cdot x, \\ F_2(n,x) &= f_2^{(n)}(x) = f_2(f^{(n-1)}(x)) \\ &= 2 \cdot f^{(n-1)}(x) = 2^n \cdot x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= 2^x \cdot x, \\ F_3(n,x) &= f_3^{(n)}(x) = 2^{f_3^{(n-1)}(x)} \cdot f_3^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} f_3^{(2)}(x) &= 2^{2^x \cdot x} \cdot 2^x \cdot x, \\ f_3^{(3)}(x) &= 2^{2^{2^x \cdot x} \cdot 2^x \cdot x} \cdot 2^{2^x \cdot x} \cdot 2^x \cdot x \end{aligned}$$

Die Funktion $F(n,x)$ wächst also mit n ungeheuer an.

Wie kann man zeigen, daß die Funktion F nicht in $\mathbb{P}$ liegt?

Wir haben eine Methode kennengelernt, die zu einer Menge F von Funktionen eine Funktion u_F konstruiert, die nicht in F liegt.

Wenn wir eine Folge

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

effektiv konstruieren können, die ganz $\mathbb{P}$ ausschöpft, dann ist $u_{\mathbb{P}}$ eine Funktion, die berechenbar ist und die nicht in $\mathbb{P}$ liegt. Das kann man in der Tat tun. Wir gehen hier einen anderen Weg,der zum Ziel führt, indem man zeigt, daß das Wachstum der Funktion F größer ist als das jeder Funktion aus $\mathbb{P}$. In der Konstruktion von F haben wir ebenfalls das Konzept der Diagonalisierung benutzt. Wir folgen nicht genau der eben angegebenen Konstruktion, sondern ersetzen sie durch eine Konstruktion, die etwas übersichtlicher ist.

Definition: Die durch die folgende Rekursion definierte Abbildung $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ heißt Ackermann'sche Funktion.

$$\begin{aligned} A(0,x) &= x^2, \\ A(n+1,0) &= 2, \\ A(n+1,x+1) &= A(n, A(n+1,x)). \end{aligned}$$

Wir verwenden auch die Bezeichnungen

$$A_n(x) := A(n,x),$$

$\forall_x^\infty$: für alle $x \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele Ausnahmen.

Lemma: $A(n,x)$ ist für $(n,x) \in \mathbb{N}^2$ berechenbar.

Beweis: $A(0,x)$ ist für alle x berechenbar.