μ-rekursive Funktionen

1. Primitiv-rekursive Funktionen

Wir definieren induktiv eine Menge $\mathbb{P}$ von Funktionen mit den Definitionsbereichen und Zielbereichen

$$\mathbb{N}^0, \mathbb{N}^1, \mathbb{N}^2, \ldots, \mathbb{N}^i, \ldots .$$

Wir definieren $\mathbb{P}$, indem wir zunächst die „elementaren“ oder „Basisfunktionen“ von $\mathbb{P}$ definieren und anschließend Operationen auf der Menge der Funktionen. $\mathbb{P}$ ergibt sich dann als der kleinste Abschluß hinsichtlich dieser Operationen, der die Basisfunktion enthält.

Die Menge der Basisfunktionen E besteht aus den folgenden Elementen:

$$\begin{array}{lcl}
1 & : & \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ 1(x) = x \text{ (Identität)} \\
c_0 & : & \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N},\ c_0(\Box) = 0 \text{ (nullstellige Konstante)} \\
N & : & \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ N(x) = x + 1 \text{ (Nachfolgerfunktion)} \\
p_0 & : & \mathbb{N} \to \mathbb{N}^0,\ p_0(x) = \Box \text{ (Projektion)} \\
d_1 & : & \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2,\ d_1(x) = (x, x) \text{ (Diagonalisierung)} \\
T & : & \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2,\ T(x, y) = (y, x) \text{ (Transposition)}
\end{array}$$

Operationen auf der Menge der Abbildungen

Sei $f : \mathbb{N}^i \to \mathbb{N}^j$, $g : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}^m$.

Wir betrachten zwei Kompositionen dieser Funktionen:

(a) $(f \times g) : \mathbb{N}^{i+l} \to \mathbb{N}^{j+m}$
$(f \times g)(x, y) := (f(x), g(y))$
für $x \in \mathbb{N}^i, y \in \mathbb{N}^l$.

(b) für $Q(f) = Z(g)$
$(f \circ g)(x) := f(g(x))$
für $x \in \mathbb{N}^i$.

Folgerung: Ist

$$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N},\ \ g_i : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N} \text{ für } i = 1, \ldots, k$$

dann läßt sich die durch

$$\begin{aligned} h(x_1, \ldots, x_m) \ &:= \ f(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \\ &\qquad g_k(x_1, \ldots, x_m)) \end{aligned}$$

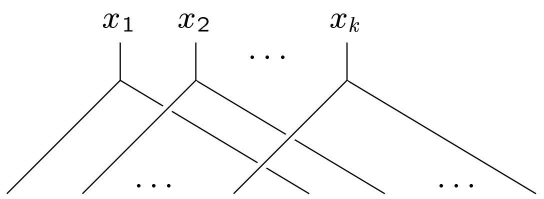
definierte Funktion mittels Basisfunktionen und den Kompositionen a) und b) erzeugen.

Wir setzen

$$1_k := 1_{k-1} \times 1,\ 1_1 = 1$$

und betrachten zunächst $d_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^{2\cdot k}$.

$$d_k(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_k, x_1, \ldots, x_k).$$



Wir definieren d_k induktiv: d_1 ist aus E. Ist d_{k-1} definiert, dann bilden wir der Reihe nach

$$\begin{array}{lcl} \tilde{f} & = & d_{k-1} \times 1, \\ g & = & 1_{2\cdot(k-1)} \times d_1, \\ T_{k-1,1} & := & (T_{k-2,1} \times 1) \circ (1_{k-2} \times T), \end{array}$$

worin $T_{1,1} := T$ ist. Nun erhalten wir

$$d_k = (1_{k-1} \times T_{k-1,1} \times 1) \circ g \circ \tilde{f}$$

$$\begin{aligned} d_k^1 &:= d_k, \\ d_k^{i+1} &:= (d_k^i \times 1_k) \circ d_k, \\ h &:= f \circ (g_1 \times \ldots \times g_k) \circ d_m^{k-1}. \end{aligned}$$

Nun definieren wir weiter das **Schema der primitiven Rekursion.**

Seien

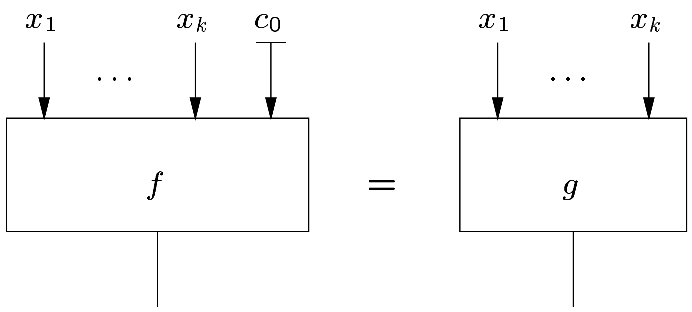
$$g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N},\ h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$$

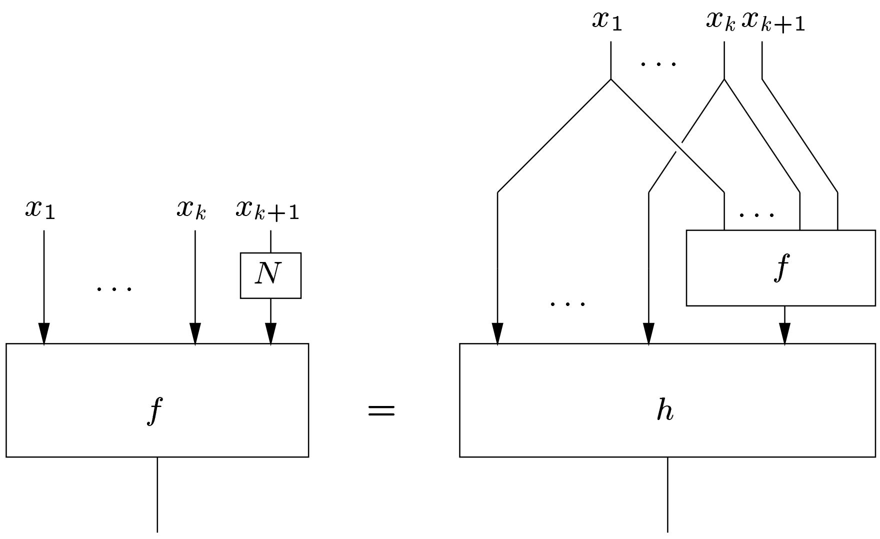
gegeben. Wir sagen: $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ wird durch das Schema der primitiven Rekursion erzeugt, wenn (1) und (2) gelten.

(1) $f \circ (1_k \times c_0) = g,$

(2) $f \circ (1_k \times N) = h \circ (1_{k+1} \times f) \circ d_{k+1}.$

Erläuterung durch die Diagramme





Lemma: Es gibt zu g, h genau eine totale Funktion f, die das Rekursionsschema erfüllt.

Beweis: Durch Induktion nach x_{k+1}. Ist $x_{k+1} = c_0$, dann ist $f_{(x_1,\ldots,x_{k+1})}$ eindeutig definiert, da $N(x_{k+1}) \neq c_0$ ist für alle x_{k+1}. Ist $x_{k+1} \neq 0$, dann gibt es genau ein x^-_{k+1} mit $x^-_{k+1} = N(x^-_{k+1})$. Unter der Annahme, daß $f_{(x_1,\ldots,x_k,x^-_{k+1})}$ definiert ist, folgt, daß $f_{(x_1,\ldots,x_{k+1})}$ definiert ist.

Da die Nachfolgerfunktion ganz $\mathbb{N}$ aus c_0 erzeugt, ist also f für alle $(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1}$ wohldefiniert.

Definition: $\mathbb{P}$ ist die kleinste Menge von Abbildungen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^j$ für $k, j \in \mathbb{N}$, die die Basisfunktionen E enthält und die abgeschlossen ist unter den Kompositionen und dem Schema der primitiven Rekursion.

Beispiele:

1) $1_k = \underbrace{1 \times \ldots \times 1}_{k \text{ mal}} \qquad 1_k \in \mathbb{P}$

Beweis: Es ist $1 \in E$. Setzen wir $1_1 = 1$ und $1_k = 1_k \times 1$, dann folgt induktiv, daß $1_k \in \mathbb{P}$ gilt.

2) $d_k \in \mathbb{P}$.

Beweis: Es ist $d_1 \in E, 1_k \in \mathbb{P}, T \in E$. Aus dem Abschluß von $\mathbb{P}$ gegenüber „$\times$“ folgt

$$\begin{aligned} f &:= d_{k-1} \times 1 \in \mathbb{P}, \\ g &:= 1_{2\cdot(k-1)} \times d_1 \in \mathbb{P}, 1_{k-2} \times T \in \mathbb{P}. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$1,\ T \in \mathbb{P} \Rightarrow 1_1 \times T \in \mathbb{P}.$$

Induktiv folgt nun

$$T_{k-1,1} = (T_{k-2,1} \times 1) \circ (1_{k-2} \times T) \in \mathbb{P},$$

und schließlich $d_k \in \mathbb{P}$.

3) $p_i^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ **Projektion** auf die i-te Komponente, d. h. $p_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Es ist

$$p_i^n = \underbrace{p_0 \times \ldots \times p_0}_{i-1} \times 1 \times \underbrace{p_0 \times \ldots \times p_0}_{n-i} \in \mathbb{P}.$$

4) Die **Vorgängerfunktion**

$$V : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ mit } V(n) = \begin{cases} n-1 & \text{für } n > 0 \\ 0 & \text{für } n = 0. \end{cases}$$

Es ist $V \in \mathbb{P}$.

Beweis:

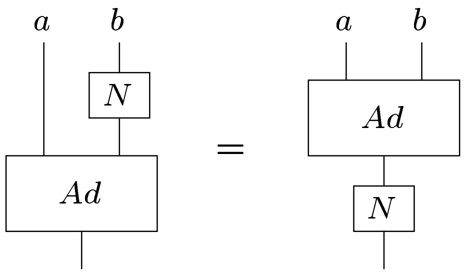
$$\begin{aligned} V \circ c_0 &= c_0 \\ V \circ N &= 1 \quad \text{(Identität).} \end{aligned}$$

Da $c_0 \in E$ und $\mathbb{P}$ abgeschlossen sind unter der Anwendung der primitiven Rekursion, ist $V \in \mathbb{P}$.
Schreibweise: $V(a, b) = a \dot{-} 1$

5) **Addition:**

$$\begin{aligned} Ad &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ Ad &\circ (1 \times c_0) = 1, \\ Ad &\circ (1 \times N) = N \circ Ad. \end{aligned}$$

Schreibweise: $a + b := Add(a, b)$.



6) **Modifizierte Differenz**

$$Dif : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \qquad Dif(x, y) := \begin{cases} x - y & \text{für } x \geq y \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schreibweise: $x \dot{-} y := Dif(x, y)$: Es gilt $Dif \in \mathbb{P}$.

Beweis:

$$\left.\begin{aligned} Dif \circ (1 \times c_0) &= 1, \\ Dif \circ (1 \times N) &= V \circ Dif \end{aligned}\right\} \text{Schema der prim. Rekursion}$$

7) **Multiplikation**

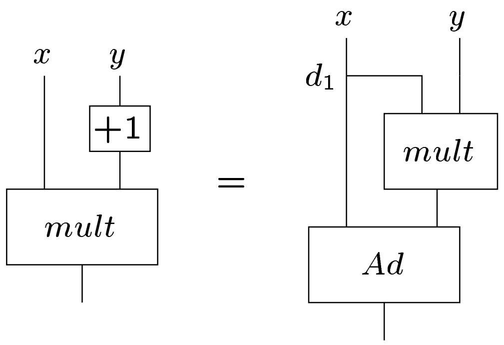
$$\left.\begin{array}{rcl} mult : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}. & & \\ mult \circ (1 \times c_0) & = & p_0 \times c_0, \\ mult \circ (1 \times N) & = & Ad \circ (1 \times mult) \\ & & \circ (d_1 \times 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Schema} \\ \text{der prim.} \\ \text{Rek.} \end{array}$$

Also $mult \in \mathbb{P}$.

Erläuterung:

$$x \cdot 0 = 0$$

$$x \cdot (y+1) = x + xy.$$



8) $\pi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^k$: π permutiert die Komponenten. Man zeigt $\pi \in \mathbb{P}$.

9) **Exponentialfunktion** $ex(x,y) = x^y$.
$ex(x,y)$ wird durch das Schema

$$\begin{aligned} ex \circ (1 \times c_0) &= p_0(\times N \circ c_0), \\ ex \circ (1 \times N) &= mult \circ (1 \times ex) \circ (d_1 \times 1) \end{aligned}$$

definiert. Also $ex \in \mathbb{P}$.

Man beobachtet,daß das Schema zur Definition der Exponentialfunktion relativ zur Multiplikation gleich dem zur Definition der Multiplikation relativ zur Addition ist.

Wir betrachten die Iteration dieses Konstruktionsverfahrens:

$$\begin{aligned} F_0(a,b) &:= a+1, \\ F_1(a,b) &:= a+b, \\ F_2(a,b) &:= a \cdot b, \\ F_3(a,b) &:= a^b \end{aligned}$$

allgemeingültig für $n > 2$

$$\begin{aligned} F_{n+1}(a,0) &:= F_n(a,0) \\ F_{n+1}(a,b+1) &= F_n(a,F_{n+1}(a,b)) \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$F(n, a, b) := F_n(a, b)$$

und erhalten eine Abbildung

$$F : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N},$$

die durch die Rekursion

$$\begin{aligned} F(i, a, b) &= F_i(a, b) \qquad \text{für } i = 1, 2, 3, \\ F(n + 1, a, 0) &= F(n, 0, 0), \\ F(n + 1, a, b + 1) &= F(n, a, F(n + 1, a, b)) \end{aligned}$$

gegeben ist.

Dieses Rekursionsschema verwendet eine simultane Rekursion in zwei Variablen und hat also nicht die Gestalt der primitiven Rekursion. Natürlich folgt daraus noch nicht, daß $F \notin \mathbb{P}$ gilt. Wir kommen hierauf später zurück.

10) Die Funktion

$$sg(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

liegt in $\mathbb{P}$.

Beweis: Das Schema

$$\begin{aligned} sg \circ c_0 &= c_0 \\ sg \circ N &= N \circ c_0 \end{aligned}$$

definiert $sg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und hat die Form der primitiven Rekursion.

11) Sei

$$c_<(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < y, \\ 0 & \text{für } x \geq y. \end{cases}$$

Beh.: $c_<(x,y) \in \mathbb{P}$.

Beweis: Es ist $c_< = sg \circ Dif \circ T$, da

$$c_<(x,y) = sg(x \dot{-} x).$$