Lemma: $L_a = L_{a'}$.

Beweis: (1) Sei nun $\varphi : \mathcal{W}(G) \longrightarrow \mathcal{W}(G')$ der Funktor, der durch die identische Abbildung auf E erzeugt wird.

(2) Ist $w \in \mathcal{W}(G)$, dann folgt $w \in \mathcal{W}(G')$. Da sich die Beschriftung beim Übergang von a zu a' nicht geändert hat, gilt

$$\mu(w) = \mu(\varphi(w)).$$

Aus $u \in L_a$ folgt also $u \in L_{a'}$, d.h. $L_a \subset L_{a'}$.

(3) I.a. ist $\mathcal{W}(G) \subsetneq \mathcal{W}(G')$: Es gilt ja nach Konstruktion

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{w_1} \; P_1 & & \\ & \Longrightarrow & \xrightarrow{w_1} [P_1] \xrightarrow{w_2} \\ P_2 \; \xrightarrow{w_2} & & \\ & & \\ a & & a' \end{array}$$

Ist $w' \in \mathcal{W}(G')(S', T')$, dann zerlegen wir $w' = w'_1 \cdot w'_2 \cdot \ldots \cdot w'_m$, worin kein w'_i den Knoten $[P_1]$ im Inneren enthält.

Wir betrachten die Situation

$$\begin{array}{lll} \xrightarrow{w'_{m-1}} & P_1 & \\ & P_2 & \xrightarrow{w'_m} T \end{array}$$

Da P_1 äquivalent zu P_2 bezüglich a ist, gibt es $\tilde{w}_m \in \mathcal{W}(G)(P_1, T)$:

$$P_1 \xrightarrow{\tilde{w}_m} T, \;\; \mu(\tilde{w}_m) = \mu(w'_m).$$

Nun ersetzen wir $w' = w'_1 \cdot \ldots \cdot w'_m$ durch den Weg

$$\tilde{w} := w'_1 \cdot \ldots \cdot w'_{m-1} \cdot \tilde{w}_m.$$

Also „springt“ $\tilde{w}$ einmal weniger als w' von P_1 nach P_2 oder umgekehrt, und es gilt $\mu(w') = \mu(\tilde{w})$. Durch die Iteration dieser Konstruktion erhalten wir schließlich einen Weg $w \in \mathcal{W}(G)(S, T)$ mit $\mu(w) = \mu(w')$. Also aus $u \in L_{a'}$ folgt $u \in L_a$, d.h. $L_{a'} \subset L_a$.

Aus (1) und (2) ergibt sich das Lemma.

Sei nun $a = (\mathcal{W}(G), S, T, \mu, X)$ ein endlicher Akzeptor und sei $P \in K(a)$. Wir definieren

$$[P]_a := \{P' \mid PqP' bzgl. a\}.$$

G' gehe aus G durch die Identifikation der jeweils äquivalenten Punkte hervor. Dabei gehe S in S' und T in T' über. Die Kanten $s \in E$ werden bei dieser Identifikation in natürlicher Weise verlagert, ohne ihre Identität einzubüßen. Der so erhaltene Automat sei a'.

Definition: a' heißt der zu a gehörige **zustandsreduzierte** Akzeptor.

Lemma: Ist a' der zu a gehörige zustandsreduzierte Akzeptor, dann gilt $L_a = L_{a'}$. Die natürliche Abbildung $P \mapsto [P]$, $s \mapsto s$ definiert einen Akzeptorhomomorphismus φ.

Beweis: a' läßt sich offfensichtlich durch die Iteration des Reduktionsschrittes aus dem vorigen Lemma konstruieren. Also gilt $L_{a'} = L_a$.

Die natürliche Abbildung φ führt Wege aus $\mathcal{W}(G)(S,T)$ in Wege aus $\mathcal{W}(G')(S',T')$ über. Die Beschriftung von a' überträgt sich mit $s \mapsto s$ identisch. Also ist φ ein Akzeptorhomomorphismus.

Lemma: Ist a ein endlicher Akzeptor und geht a' aus a durch Zerlegung der Kante s mit $\mu(s) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_k$ in einen Weg $s_1 \cdot \ldots \cdot s_k$ und $\mu'(s_i) := x_i$ hervor, dann definiert die Abbildung $s \mapsto s_1 \cdot \ldots \cdot s_k$ und $s' \mapsto s'$ für $s' \in E$, $s' \neq s$ einen Akzeptorhomomorphismus von a auf a'.

Beweis: klar.

Beobachtung: Diese Reduktion erhöht die Anzahl der Kanten.

Definition: Der Akzeptor a heißt reduziert $:\Longleftrightarrow$

(1) a ist knotenreduziert

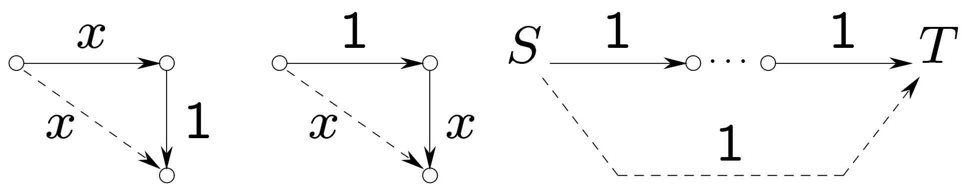
(2) $|\mu(s)| \leq 1$ für $s \in E$

(3) $s, s' \in E$ $Q(s) = Q(s')$, $Z(s) = Z(s')$, $\mu(s) = \mu(s') \Rightarrow s = s'$.

Satz: Zu jedem Akzeptor a gibt es einen reduzierten Akzeptor a' und eine Reduktion $\varphi : a \to a'$.

Beweis: Folgt aus den beiden vorigen Lemmata und der Beobachtung, daß die Identifikation paralleler, gleichbeschriftetet Kanten eine Reduktion definiert.

Die Elimination von 1-Kanten beruhte auf der Einführung von Brücken, wie es die folgenden Diagramme zeigen: Die Brücken sind hervorgehoben.



Nachdem alle erforderlichen Brücken eingezogen waren, konnten wir die 1-Kanten (außer einer von s nach T) löschen. Sei a' der Automat, der aus a durch diese Konstruktion gewonnen wurde.

Nun definieren wir eine Reduktion $\varphi : a' \to a$, indem wir jede neu gewonnene Kante auf den Weg abbilden, den sie überbrückt. Diese Abbildung ist offensichtlich ein Homomorphismus und wie wir bereits gezeigt haben, läßt dieser Homomorphismus die Sprache invariant. Also gilt das

Lemma: Geht a durch die 1-Kantenelimination durch Überbrückungen in a' über, dann gibt es eine Reduktion $\varphi : a' \to a$.

Wir betrachten nun noch das „vollständig und deterministisch machen“.

Für den in dem vorigen Lemma konstruierte Automat a' gilt $|\mu'(s)| = 1$ für alle bis auf höchstens eine Kante von S nach T mit Beschriftung $= 1$. Das Vollständigmachen bestand in der Einführung eines neuen Knotens P, zu dem alle erforderlichen neuen Kanten hingeführt wurden. Zu jedem $x \in X$ haben wir weiter Kanten $P \xrightarrow{s_x} P$ mit $\mu(s_x = x)$ eingeführt. Ist a'' der so zu a' konstruierte vollständige Akzeptor, dann definiert die Inklusion von a' in a'' eine Reduktion.

Wir fassen die erhaltenen Resultate in einem Diagramm zusammen.

$$a_1 \xrightarrow{\varphi_1} a_2 \xleftarrow{\varphi_2} a_3 \xrightarrow{\varphi_3} a_4 \xrightarrow{\varphi_4} a_5.$$

Hierin ist a_1 der beliebig vorgegebene Akzeptor.

φ_1 bezeichnet das „Kantenbrechen“.
φ_2 bezeichnet die „Entfernung der 1-Kanten“.
φ_3 führt a_3 in den „zugehörigen reduzierten “Akzeptor über.
φ_4 liefert die Einbettung in den vervollständigten Akzeptor.

Wir können $\varphi_3 \circ \varphi_4$ durch eine Reduktion φ_3' überbrücken. Also gilt das

Lemma: Jeder endliche Akzeptor a_1 läßt sich durch eine Kette von drei Reduktionen in einen Akzeptor a_4 überführen.

$$a_1 \xrightarrow{\varphi_1} a_2 \xleftarrow{\varphi_2} a_3 \xrightarrow{\varphi_3'} a_4' = a_5.$$

Korollar: Ist a_1 ein 1-kantenfreier Akzeptor,dann läßt sich a_1 durch eine Reduktion in einen reduzierten vollständigen Akzeptor überführen.

Wir gehen nun von dem vollständigen Akzeptor a aus und betrachten die Konstruktion des zugehörigen vollständigen deterministischen Akzeptor a'.Wie sich aus unserem Beweis für $L_a = L_{a'}$ ergibt, können wir jedem Weg $w \in \mathcal{W}(G)$ aufgrund seiner Beschriftung eindeutig einen Weg $w' \in \mathcal{W}(G')$ mit der gleichen Beschriftung zuordnen. Wir haben darüber hinaus gezeigt, daß es zu jedem $w' \in \mathcal{W}(G')(S', T')$ einen Weg $w \in \mathcal{W}(G)(S, T)$ gibt, der bei dieser Konstruktion auf w' abgebildet wird.

Diese Konstruktion ist aber i.a. **kein** Akzeptorhomomorphismus. Der Weg

$$w := P_1 \xrightarrow{x_1, s_1} P_2 \xrightarrow{x_2, s_2} P_3 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{x_{k-1}, s_{k-1}} P_k$$

kann z.B. übergehen in

$$\overline{P}_1 := \{P_1\} \xrightarrow{x_1} \overline{P}_2 := \{\ldots, P_2, \ldots\} \xrightarrow{x_2} \cdots \xrightarrow{x_{k-1}} \overline{P}_k := \{\ldots, P_k, \ldots\},$$

aber auch in einen Weg

$$\tilde{w} := \tilde{P}_1 := \{\ldots, P_1, \ldots\} \xrightarrow{x_1} \cdots \xrightarrow{x_{k-1}} \tilde{P}_k := \{\ldots, P_k, \ldots\},$$

wenn w z.B. ein Weg w' vorgeschaltet wird, der von einem Knoten $\{P\}$ zu dem Knoten $\tilde{P}_1$ von a' führt.

Wir erhalten aber, wie schon gesagt, eine surjektive Abbildung von $\mathcal{W}(G)(S,T)$ auf $\mathcal{W}(G')(S',T')$. Man sagt: Die Wege $\mathcal{W}(G)(S,T)$ **überlagern** $\mathcal{W}(G')(S',T')$.

Wir betrachten zum Abschluß die Frage, wie vollständige deterministische Akzeptoren a, b mit $L_a = L_b$ zusammenhängen.

Hierzu definieren wir zunächst für $u, v \in X^*$

$$u \equiv_r v(L) :\Longleftrightarrow \forall_w (uw \in L \iff vw \in L).$$

Man sieht: Für $w \in X^*$ gilt

$$u \equiv_r v(L) \Rightarrow uw \equiv_r vw(L).$$

Wir bezeichnen mit $[u]_r$ diese Rechtskongruenzklassen. Die Menge dieser Klassen sei X^*/L. Nun ist

$$\#(X^*/L) < \#Synt(L)$$
$$\Rightarrow \ (L \in REG(X^*) \Rightarrow X^*/L \text{ ist endlich}).$$

Wir ordnen L vermittels X^*/L einen endlichen Akzeptor a mit $L_a = L$ zu, indem wir definieren

$$[u]_r \xrightarrow{x} [u']_r :\Longleftrightarrow u' = u \cdot x,$$
$$s = [1]_r, \ T = \{[u]_r \mid u \in L\}.$$

a ist vollständig und deterministisch. Wir können die Wege W in G_a als durch Angabe des Anfangspunktes und ihre Beschriftung $\mu(w)$ eindeutig bestimmen. Offensichtlich ist $L_a = L$. Nach Konstruktion ist a reduziert.

Sei nun b ein beliebiger vollständiger deterministischer Akzeptor mit $L_b = L_a$. Ist P ein Knoten von b und $b_P = (\mathcal{W}(G_b), P, T, \mu, X)$ und $L_P := L_{b_P}$, dann definieren wir

$$\Psi(P) := [u]_r \quad \text{für} \quad S \xrightarrow{u} P.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert...

Ist $s \in E_b$ mit $\mu(s) = x$, $Q(s) = P$, dann sei

$$\varphi_2(s) = s' \;:\Longleftrightarrow\; Q(s') = \Psi(P) \text{ und } \mu(s') = x$$

φ_2 ist wohldefiniert aufgrund der Determiniertheit von a und b.

Setze auf $\mathcal{W}(G_b)$ fort. $\varphi_1 := id_X$.

Also ist $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ eine Reduktion von b auf a.