Satz: Ist a ein endlicher Akzeptor, dann sind die Fragen $L_a = \emptyset$? und $L_a = X^*$? entscheidbar.

Beweis: (1) $L_{\underline{a}} = \emptyset \iff \mathcal{W}(G)(S,T) = \emptyset$. Das ist das Erreichbarkeitsproblem in einem endlichen Graphen und ist damit entscheidbar.

(2) $L_a = X^* \iff L_{\overline{a}} = \emptyset$, wenn $\overline{a}$ ein Akzeptor ist, der die Komplementmenge von L_a akzeptiert. $\overline{a}$ ist aus a effektiv konstruierbar, so daß also $L_{\overline{a}} = \emptyset$? entscheidbar.

Definition: a heißt (schwach) äquivalent zu $b :\iff$

$$L_a = L_b.$$

Satz: Für endliche Akzeptoren a und b ist $L_a = L_b$ entscheidbar.

Definition: Seien a, b endliche Automaten mit den Alphabeten X bzw. Y. Sei

$$\varphi_1 : X^* \longrightarrow Y^* \text{ ein Homomorphismus}$$

und

$$\varphi_2 : \mathcal{W}(G_a) \longrightarrow \mathcal{W}(G_b) \text{ ein Funktor.}$$

$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ heißt Akzeptorhomomorphismus $:\Longleftrightarrow$ Es gelten (A1) und (A2).

(A1) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}(G_a) & \xrightarrow{\mu_a} & X^* \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathcal{W}(G_b) & \xrightarrow{\mu_b} & Y^* \end{array}$$

ist kommutativ.

(A2) $\varphi(S_a) \subset S_b$, $\varphi(T_a) \subset T_b$.

Beobachtung: $\varphi : a \longrightarrow b$ Akzeptorhomomorphismus $\Rightarrow \varphi_1(L_a) \subset L_b$.

φ heißt längenerhaltend $:\Longleftrightarrow \varphi_2(E_a) \subset E_b$.

φ heißt nicht expandierend $:\Longleftrightarrow \varphi_2(E_a) \subset E_b \cup \{1p \mid P \in K_b\}$.

Satz: Ist $\varphi : a \to b$ ein Akzeptorhomomorphismus und ist

$$\varphi_2(\mathcal{W}_a(S_a, T_a)) = \mathcal{W}_b(s_b, T_b),$$

dann gilt $\varphi_1(L_a) = L_b$.

Definition: Der Homomorphismus $\varphi : a \to b$ heißt **Reduktion** von a auf $b :\Longleftrightarrow$ Es gilt $\varphi_2(\mathcal{W}_a(s_a, T_a)) = \mathcal{W}_b(S_b, T_b)$ und $\varphi_1 = id_X$.

Satz: Ist $\varphi : a \to b$ eine Reduktion, dann gilt $L_a = L_b$.

Satz: Sind a, b endliche Akzeptoren und ist $L_a = L_b$, dann gibt es eine Kette von Reduktionen, die a in b überführen.

Erläuterung: Sei $a = a_1, a_2, \ldots, a_n = b$ eine Folge von Automaten und es gebe zu a_i, a_{i+1} stets eine Reduktion $\varphi^i : a_i \longrightarrow a_{i+1}$ oder $\varphi^i : a_{i+1} \longrightarrow a_i$. Da die Hintereinanderausführung von zwei Reduktionen wieder eine Reduktion ist und da die Identität ebenfalls eine Reduktion ist, können wir uns auf die Situation

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & a_2 & & & & a_{n-1} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \cdots \swarrow & & \searrow & \\
a_1 & & & & a_3 & & & & a_n
\end{array}
$$

beschränken.

Der Beweis verwendet das folgende

Lemma: Sind a, b, c vollständige deterministische Akzeptoren, und sind $\varphi_a : c \longrightarrow a$ und $\varphi_b : c \longrightarrow b$ Reduktionen mit $\varphi_{a,2}^{-1}(S_a) = S_c$, $\varphi_{b,2}^{-1}(S_b) = S_c$, $\varphi_{a,2}^{-1}(T_a) = T_c$, $\varphi_{b,2}^{-1}(T_b) = T_c$, dann gibt es einen vollständigen deterministischen Akzeptor d und Reduktionen $\gamma_a : a \longrightarrow d$, $\gamma_b : b \longrightarrow d$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "\varphi_a"'] \arrow[dr, "\varphi_b"] & \\ a \arrow[dr, "\gamma_a"'] & & b \arrow[dl, "\gamma_b"] \\ & d & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Beweisidee: Man definiere auf K_c und E_c Äquivalenzrelationen, indem man solche Elemente zusammenfaßt, die unter φ_a oder φ_b auf das gleiche Element abgebildet werden. Hat man also

$$\begin{array}{ccccccccc} s_1 & & & & s_2 & & & & s_3 \quad \cdots \\ & \varphi_a \searrow & & \swarrow \varphi_a & & \varphi_b \searrow & & \swarrow \varphi_b & \\ & & s & & & & s & & \end{array}$$

dann bildet man die Klasse

$$[s_1] = \{s_1, s_2, s_3, \ldots ,\}.$$

Diese Klassenbildung führt zu einem Akzeptor d mit der gewünschten Eigenschaft.

Bemerkung: Die Voraussetzung „vollständig" ist wesentlich dafür, daß es die Reduktionen γ_a und γ_b gibt.

Folgerung: Jede Kette von Reduktionen vollständiger deterministischer Automaten läßt sich auf ein Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & c & \end{array}$$

reduzieren.

Definition: Sei $a = (\mathcal{W}(G), S, T, \mu, X)$ ein endlicher Akzeptor und $P_1, P_2 \in K(a)$. Weiter sei $a_i := (\mathcal{W}(G), P_i, T, \mu, X)$ für $i = 1, 2$. P_1 heißt **äquivalent** zu P_2 bezüglich $a :\Longleftrightarrow L_{a_1} = L_{a_2}$. a heißt **reduziert** $:\Longleftrightarrow$ Für alle Punktepaare $\{P_1, P_2\}$ aus $K(a)$ gilt P_1 nicht äquivalent zu P_2 bezüglich a.

Reduktion von a

Sei $P_1 \neq P_2$, aber P_1 äquivalent zu P_2 bezüglich a. Wir konstruieren den Automaten a' aus a, indem wir die Knoten P_1 und P_2 identifizieren. Den so entstandenen Knoten bezeichnen wir mit $[P_1]$. Die Kanten s, die in P_i enden bzw. beginnen enden bzw. beginnen nun in $[P_1]$. Der neue Graph sei G'. Die Beschriftung der Kanten wird nicht verändert. Bei dieser Identifikation mögen T in T' und S in S' übergehen. Wir definieren : $a' := (\mathcal{W}(G'), S', T', \mu, X)$.

Lemma: $L_a = L_{a'}$.

Beweis: (1) Sei nun $\varphi : \mathcal{W}(G) \longrightarrow \mathcal{W}(G')$ der Funktor, der durch die identische Abbildung auf E erzeugt wird.

(2) Ist $w \in \mathcal{W}(G)$, dann folgt $w \in \mathcal{W}(G')$. Da sich die Beschriftung beim Übergang von a zu a' nicht geändert hat, gilt

$$\mu(w) = \mu(\varphi(w)).$$

Aus $u \in L_a$ folgt also $u \in L_{a'}$, d.h. $L_a \subset L_{a'}$.

(3) I.a. ist $\mathcal{W}(G) \subsetneq \mathcal{W}(G')$: Es gilt ja nach Konstruktion

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{w_1} \; P_1 \qquad & & \\ & \Longrightarrow & \xrightarrow{w_1} [P_1] \xrightarrow{w_2} \\ \qquad P_2 \; \xrightarrow{w_2} & & \\ & & \\ a & & a' \end{array}$$

Ist $w' \in \mathcal{W}(G')(S', T')$, dann zerlegen wir $w' = w'_1 \cdot w'_2 \cdot \ldots \cdot w'_m$, worin kein w'_i den Knoten $[P_1]$ im Inneren enthält.

Wir betrachten die Situation

$$\begin{array}{ll} \xrightarrow{w'_{m-1}} & P_1 \\ & P_2 \xrightarrow{w'_m} T \end{array}$$

Da P_1 äquivalent zu P_2 bezüglich a ist, gibt es $\tilde{w}_m \in \mathcal{W}(G)(P_1, T)$:

$$P_1 \xrightarrow{\tilde{w}_m} T,\ \mu(\tilde{w}_m) = \mu(w'_m).$$

Nun ersetzen wir $w' = w'_1 \cdot \ldots \cdot w'_m$ durch den Weg

$$\tilde{w} := w'_1 \cdot \ldots \cdot w'_{m-1} \cdot \tilde{w}_m.$$

Also „springt“ $\tilde{w}$ einmal weniger als w' von P_1 nach P_2 oder umgekehrt, und es gilt $\mu(w') = \mu(\tilde{w})$. Durch die Iteration dieser Konstruktion erhalten wir schließlich einen Weg $w \in \mathcal{W}(G)(S, T)$ mit $\mu(w) = \mu(w')$. Also aus $u \in L_{a'}$ folgt $u \in L_a$, d.h. $L_{a'} \subset L_a$.

Aus (1) und (2) ergibt sich das Lemma.