Deklaration der Variablen und Prozeduren:

Beide Summanden stehen in binären n-stelligen Registern $x = (x_{n-1}, \ldots, x_0)$ und $y = (y_{n-1}, \ldots, y_0)$. Das Resultat stehe nach Abschluß der Berechnung in x. $i = (i_{k-1}, \ldots, i_0)$ ist ein binäres Register. $i := i + 1)$ bezeichnet eine Prozedur, die im Dualsystem modulo $2^k = n$ zählt. z ist eine boolesche Hilfsvariable.

Anweisungsteil

Schulmethode Addition: $Arg(x, y)$, $Res(x, z)$.

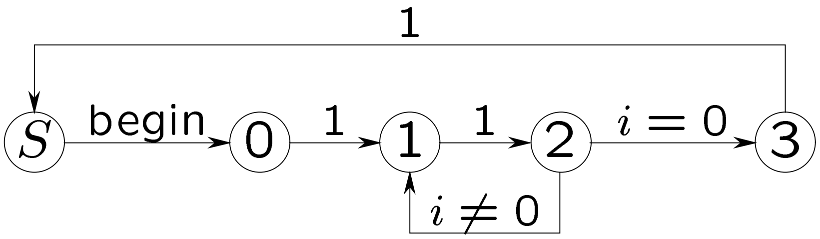
$$
\begin{array}{ll}
0: & i := 0, z := 0; \\
1: & x_i := x_i \oplus y_i \oplus z, \\
 & z := (x_i \cdot y_i) \vee ((x_i \oplus y_i) \cdot z), i := i + 1; \\
2: & \text{if } i = 0 \text{ then goto 3 else goto 1;} \\
3: & \text{end}
\end{array}
$$

Erläuterung: In Zeile 0 des Programmes werden der Zähler i und die Variable z zugleich auf Null gesetzt. i zählt die Bitposition, deren Summe und Übertrag berechnet wird. z enthält den jeweiligen Übertrag.

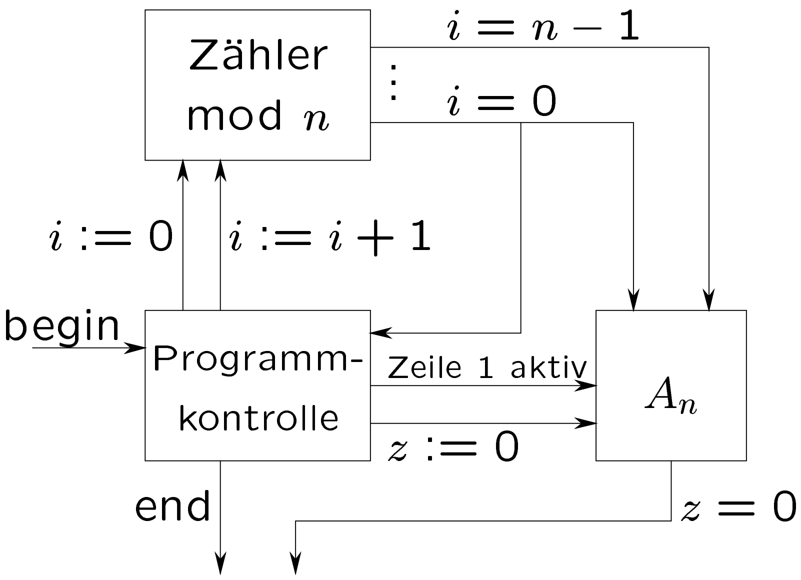
In Zeile 1 addieren wir die beiden i-ten Stellen und den Übertrag der vorhergehenden Stelle modulo 2. Das Ergebnis wird als i-tes Bit der Summe nach x_i geschrieben. Zugleich wird der Übertrag, der an der i-ten Stelle erzeugt wird, berechnet. Weiter inkrementieren wir den „Indexzähler". In Zeile 2 fragen wir, ob alle Stellen abgearbeitet sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn $i = 0$ ist. Dann wird in Zeile 3 das Mikroprogramm beendet. Andernfalls wird das Programm in Zeile 1 fortgesetzt.

Wir geben einen endlichen Automaten a an, der den Programmablauf steuert.

$$K := \{S, 0, 1, 2, 3\},\ T := \{3\},$$
$$X := \{\text{begin}, i = 0, i \neq 0\}.$$



In diesem Akzeptor dürfen wir die 1-Kanten **nicht** eliminieren, da mit diesen Kanten wesentliche Ausgaben verbunden sind. Über das Gesamtnetzwerk gibt das folgende Diagramm eine Übersicht:



Die Realisierung des Zählers $mod\ n$ und des Addierers A_n dürfen wir hier als bekannt voraussetzen.

Das letzte Beispiel zeigt deutlich, daß wir die Diskussion endlicher Automaten nicht vollständig auf die Diskussion endlicher Akzeptoren verlagern können. Aus diesem Grund ergänzen wir nun den endlichen Akzeptor durch eine Ausgabe.

Definition: $\underline{t} = (\mathcal{W}(G), S, T, \mu, X, \beta, Y)$ heißt **endlicher Transduktor** mit Eingabealphabet X und Ausgabealphabet Y : $\Longleftrightarrow$

$a = (\mathcal{W}(G), S, T, \mu, X)$ ist ein endlicher Akzeptor

und $\beta : \mathcal{W}(G) \longrightarrow Y^*$ ist ein Funktor.

$\underline{t}$ heißt längenerhaltend : $\Longleftrightarrow$ $|\mu(s)| = |\beta(s)|$ für alle $s \in E(G)$.

Wir sagen: $\underline{t}$ definiert die endliche Transduktion

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\underline{t}) := \{(u,v) \in X^* \times Y^* \mid \\ \exists\, w \in \mathcal{W}(S,T) :\ \mu(w) = u \wedge \beta(w) = v\}. \end{aligned}$$

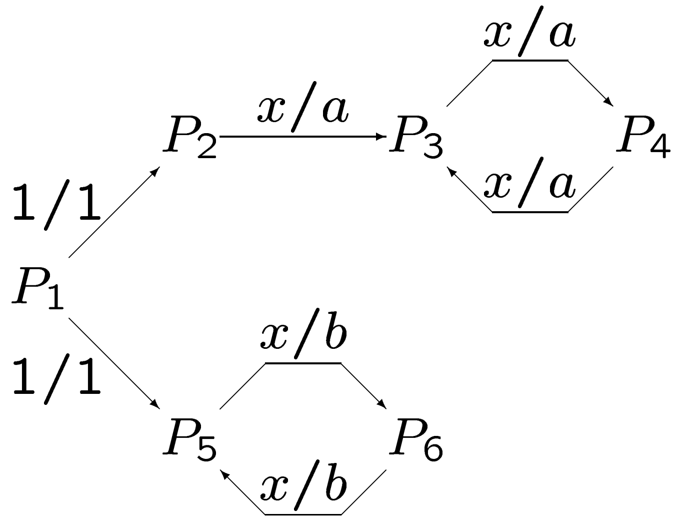
Ist $(u,v) \in \mathcal{T}(t)$, dann reagiert also der Transduktor $\underline{t}$ auf die Eingabe u mit der Ausgabe v. I.a. wird v durch u nicht eindeutig bestimmt.

Im internationalen Sprachgebrauch heißt $\mathcal{T}(\underline{t})$ eine rationale Transduktion und $\underline{t}$ rationaler Transduktor. Da wir das Konzept der Akzeptoren, wie wir gesehen haben, in natürlicher Weise auf unendliche Akzeptoren verallgemeinern können, ist der Zusatz „endlich“ nicht immer überflüssig.

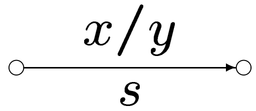
Beobachtung: Zu jedem längenerhaltenden Transduktor $\underline{t}$ kann man einen Transduktor $\underline{t}'$ angeben mit $|\mu'(s)| = |\beta'(s)| \leq 1$ und $\mathcal{T}(\underline{t}) = \mathcal{T}(\underline{t}')$.

Beispiel:

$$\underline{t} := (\mathcal{W}(G), \{P_1\}, \{P_3, P_5\}, \mu, \{x\}, \beta, \{a, b\})$$



Notation: $\mu(s) = x,\ \beta(s) = y$ schreiben wir in dem Diagramm wie



$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\underline{t}) \;=\; & \{(x,a)^n \mid n \cong 1\ mod\ 2\} \cup \\ & \{(x,b)^n \mid n \cong 0\ mod\ 2\} \end{aligned}$$

Definition: Für $u \in X^*$ definieren wir

$$\mathcal{T}(\underline{t})(u) := \{v \in Y^* \mid \text{ Es gibt } w \in \mathcal{W}(G)(S,T) \text{ mit } \mu(w) = u, \beta(w) = v\}$$

In anderen Worten

$$\mathcal{T}(\underline{t})(u) = \{v \in Y^* \mid (u,v) \in \mathcal{T}(\underline{t})\}.$$

Wir können die Funktionen μ und β auch auf E^* fortsetzen. Dann ist $\mu^{-1}(u)$ die Menge der Urbilder von $u \in X^*$ in E^*. Es gilt für $a = (\mathcal{W}(G), S, T, \mu, X)$

$$u \in L_a \Longleftrightarrow \mu^{-1}(u) \cap \mathcal{W}(G)(S,T) \neq \emptyset$$

und also

$$\mathcal{T}(\underline{t})(u) = \beta(\mu^{-1}(u) \cap \mathcal{W}(G)(S,T)).$$

Nun ist aber $\mathcal{W}(G)(S,T) \in REG(E^*)$ (s. Übgn.). Also ist auch $\mu^{-1}(u) \cap \mathcal{W}(G)(S,T) \in REG(E^*)$. Hieraus folgt weiter

$$\mathcal{T}(\underline{t})(u) \in REG(Y^*).$$

Wir definieren für $L \subset X^*$

$$\mathcal{T}(\underline{t})(L) := \bigcup_{u \in L} \mathcal{T}(\underline{t})(u).$$

Satz: $L \subset REG(X^*) \Rightarrow \mathcal{T}(\underline{t})(L) \in REG(Y^*)$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
& \mu^{-1}(L) \in REG(E^*) \\
& \mathcal{W}(G)(S,T) \in REG(E^*) \\
\Rightarrow\ & \mu^{-1}(L) \cap \mathcal{W}(G)(S,T) \in REG(E^*) \\
\Rightarrow\ & \mathcal{T}(\underline{t})(L) = \beta(\mu^{-1}(L) \cap \mathcal{W}(G)(S,T)) \\
& \in REG(Y^*).
\end{aligned}$$

Lemma: $\mathcal{T}^{-1}(\underline{t}) = \{(u,v) \mid (v,u) \in \mathcal{T}(\underline{t})\}$ ist eine rationale Transduktion.

Satz: Sind

$$\mathcal{T}_1 : X^* \longrightarrow Y^*,\ \mathcal{T}_2 : Y^* \longrightarrow Z^*$$

rationale Transduktionen ohne 1-Kanten und längenerhaltend, dann ist auch $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$ eine rationale Transduktion.

Beweis: Das folgende Diagramm gibt eine Übersicht über den Beweis

$$\begin{tikzcd}
 & & E_3^* \cap R_3 \arrow[dl, "\chi"'] \arrow[dr, "\rho"] & & \\
 & E_1^* \cap R_1 \arrow[dl, "\mu_1"'] \arrow[dr, "\beta_1"] & & E_2^* \cap R_2 \arrow[dl, "\mu_2"'] \arrow[dr, "\beta_2"] & \\
X^* \arrow[rr, "\tau_1"] & & Y^* \arrow[rr, "\tau_2"] & & Z^*
\end{tikzcd}$$

Hierin ist $R_i := \mathcal{W}(G_i)(S_i, T_i)$ für $i = 1, 2$. O.B.d.A. $\mu_1(E_1) \subset X$, $\mu_2(E_2) \subset Y$, $\beta_1(E_1) \subset Y$, $\beta_2(E_2) \subset Z$.

Wir setzen: $\chi(s_1, s_2) = s_1, \varrho(s_1, s_2) = S_2$ und

$$E_3 := \{(s_1, s_2) \in E_1 \times E_2 \mid \beta_1(s_1) = \mu_2(s_2)\}$$

und

$$R_3 := \{w \in E_3^* \mid \chi(w) \in R_1 \text{ und } \varrho(w) \in R_2\}.$$

Ist also

$$w = ((s_1, s_1'), \ldots, (s_k, s_k')) \in R_3,$$

dann gilt

$$(s_1, \ldots, s_k) \in \mathcal{W}(G_1)(S_1, T_1)$$

und

$$(s_1', \ldots, s_k') \in \mathcal{W}(G_2)(S_2, T_2).$$

Setzen wir

$$\mu := \mu_1 \circ \chi, \;\; \beta := \beta_2 \circ \varrho,$$

dann ist

$$\beta(\mu^{-1}(u) \cap R_3) = \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2.$$

Also ist $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$ eine längenerhaltende rationale Transduktion ohne 1-Kanten.

Korollar: Die längenerhaltenden rationalen Transduktionen bilden eine Kategorie.

Definition: $\underline{t} := (\mathcal{W}(G), S, T, \mu, X, \beta, Y)$ heißt deterministisch, wenn $a = (\mathcal{W}(G), S, T, \mu, X)$ deterministisch ist.