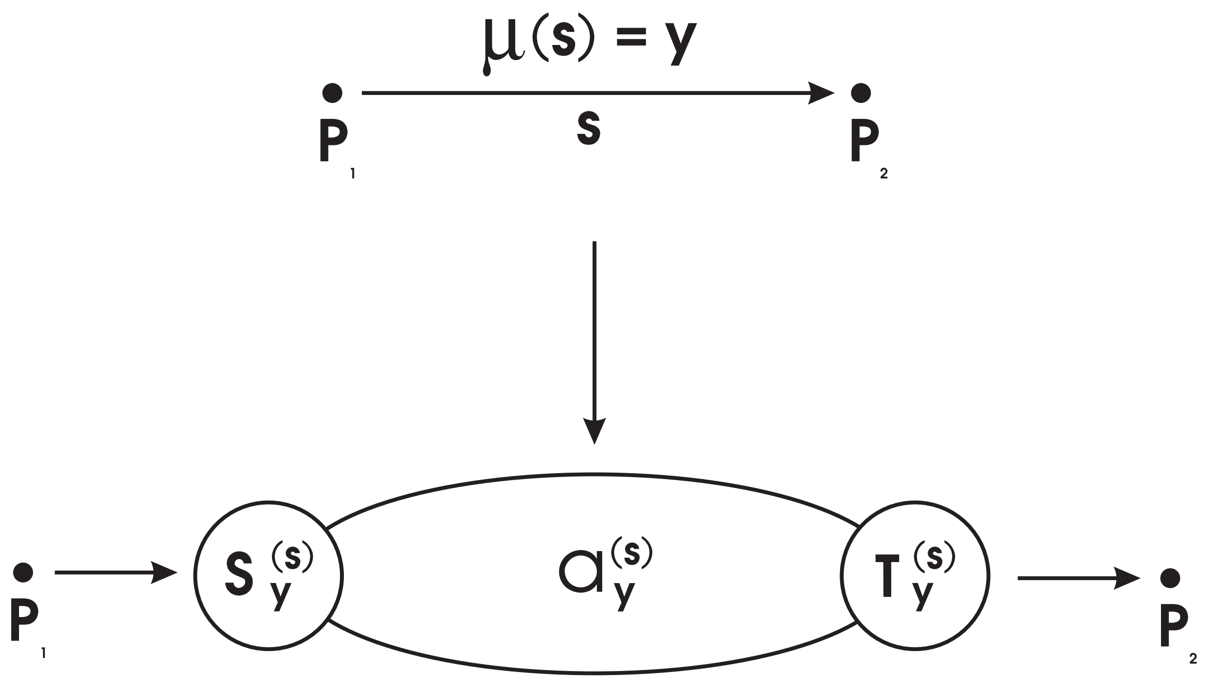
Endliche Akzeptoren (29)

Lemma: Ist $h : Y^* \longrightarrow REG(X^*)$ ein Monoidhomomorphismus und ist $L \in REG(Y^*)$, dann ist $h(L) \in REG(X^*)$; hierin ist $h(L) := \bigcup_{w \in L} h(w)$.

Beweis: Wir wählen zu L einen vollständigen Akzeptor a mit $L_a = L$. Zu jedem $y \in Y$ wählen wir einen Akzeptor a_y für $h(y)$ mit $\#S_y = \#T_y = 1$. Zu jeder Kante s von a mit $\mu(s) = y$ wählen wir ein zu a_y isomorphes Exemplar $a_y^{(s)}$, so daß $a_y^{(s)}$ und $a_y^{(s')}$ keine Knoten gemeinsam haben.

Nun hängen wir in den Graphen von a für jede Kante s, $\mu(s) = y$, $a_y^{(s)}$ ein, wie es das folgende Diagramm beschreibt.

Endliche Akzeptoren (30)



Resultat $\tilde{a}$. Es gilt $L_{\tilde{a}} = h(L)$.

Durch Homom. erkennbare Mengen (1)

Definition: Sei a ein Akzeptor und P_1, P_2 zwei Knoten in a. P_1 und P_2 heißen genau dann äquivalent in Bezug auf a, wenn es zu jedem Weg $w_1 \in \mathcal{W}(G)(P_1, T)$ einen Weg $w_2 \in \mathcal{W}(G)(P_2, T)$ gibt, mit $\mu(w_1) = \mu(w_2)$ und umgekehrt auch.

Lemma: Seien P_1, P_2 bezüglich a äquivalente Punkte. a' ergebe sich aus a durch Identifikation von P_1 und P_2. Es gilt dann $L_a = L_{a'}$.

Beweis:

(1) $L_a \subset L_{a'}$, da jeder Weg in a auch ein Weg in a' ist.

(2) $L_{a'} \subset L_a$. Betrachte

$$\begin{array}{llll} S & \xrightarrow{w_1} & P_1 & \\ & & P_2 \xrightarrow{w_2} & T. \end{array}$$

$w_1 \cdot w_2$ ist ein Weg in $\mathcal{W}(G')$. Aus der Äquivalenz von P_1, P_2 folgt leicht die Behauptung.

Durch Homom. erkennbare Mengen (2)

Definition: a' heißt eine Reduktion von a, wenn a' aus a durch Identifikation äquivalenter Knoten erhalten werden kann.

Korollar: Ist a' eine Reduktion von a, dann gilt $L_a = L_{a'}$.

Definition: a heißt reduziert $:\iff$ sind P_1, P_2 äquivalente Knoten aus a, dann ist $P_1 = P_2$.

Korollar: Zu jedem Akzeptor a gibt es einen reduzierten Akzeptor a' mit $L_a = L_{a'}$.

Lemma: Ist a ein vollständiger deterministischer Akzeptor und ist a' ein zu a gehöriger reduzierter Akzeptor, dann ist auch a' vollständig und deterministisch.

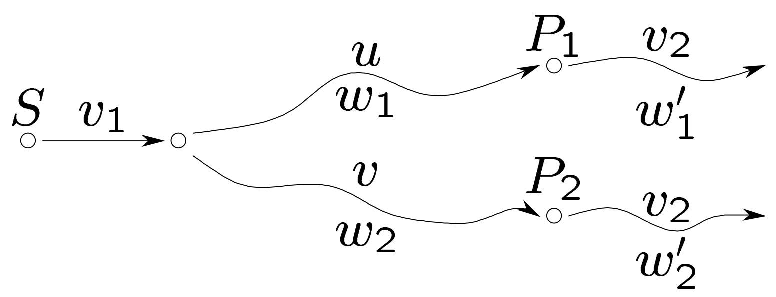
Zeige: Sind P_1, P_2 äquivalent in a, dann gilt das auch für die Nachfolgeknoten P_1', P_2'

$$P_1 \xrightarrow{x} P_1', \quad P_2 \xrightarrow{x} P_2'.$$

Durch Homom. erkennbare Mengen (3)

Lemma: Sei a ein vollständiger deterministischer reduzierter Akzeptor. Ist $u \equiv v\ (L_a)$, dann gilt für Wege w_1, w_2 mit $Q(w_1) = Q(w_2)$ und $\mu(w_1) = u$ und $\mu(w_2) = v$, daß $Z(w_1) = Z(w_2)$ ist.

Erläuterung:



Für alle v_2 gilt $Z(w'_1) \in T \Leftrightarrow Z(w'_2) \in T$, d.h. P_1 äq. P_2.

Durch Homom. erkennbare Mengen (4)

Satz: $L \subset X^*$ ist regulär $\iff$ $synt(L)$ ist endlich.

Beweis:

(1) Wir haben $synt(L)$ endlich $\Rightarrow L \in REG$ bereits gezeigt.

(2) $L \in REG \Rightarrow synt(L)$ endlich folgt aus dem vorhergehenden Lemma.

Hinweis: Es gilt unter den Voraussetzungen des Lemmas stets: Aus $u \equiv v(L_a)$ folgt

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] & \circ \end{tikzcd}$$