Endliche Akzeptoren (7)

Beobachtung: $\{x\} \in REG(X^*)$ für $x \in X$, $\emptyset \in REG(X^*)$.

Satz:

$$L_1, L_2 \in REG(X^*) \Rightarrow \begin{array}{ll} (1) & L_1 \cup L_2 \in REG(X^*) \\ (2) & L_1 \cdot L_2 \in REG(X^*) \\ (3) & L_1^* \in REG(X^*) \end{array}$$

Beweis: Tafel

Satz: Ist $h : X^* \longrightarrow \tilde{X}^*$ ein Homomorphismus, dann gilt

$$L \in REG(X^*) \Rightarrow h(L) \in REG(\tilde{X}^*).$$

Endliche Akzeptoren (8)

$sp : X^* \longrightarrow X^*$ definiert durch

$$\begin{array}{lcl} sp(1) & = & 1 \\ sp(x) & = & x \quad \text{für } x \in X \\ sp(u \cdot v) & = & sp(v) \cdot sp(u). \end{array}$$

Sonderfall eines Antihomomorphismus.

Satz: $L \in REG(X^*) \Rightarrow sp(L) \in REG(X^*)$.

Satz: $L \in REG(X^*) \Rightarrow \overline{L} := X^* - L \in REG(X^*)$.

Der Beweis ergibt sich aus den folgenden Lemmata.

Endliche Akzeptoren (9)

Lemma: Zu jedem Akzeptor a gibt es einen Akzeptor a', der (1), (2) und (3) erfüllt.

(1) $L_a = L_{a'}$ und $\sharp S' = \sharp T' = 1$.

(2) $\mu'(s) \in X \cup \{1\}$ für jede Kante s von a'.

(3) Ist $\mu'(s_1) = \mu'(s_2) = 1$ für zwei Kanten s_1, s_2 von a', dann gilt $s_1 = s_2$ und $Q(s_1) \in S', Z(s_1) \in T'$.

Beweis: Der Beweis erfolgt in drei Schritten.

Schritt 1: Ist s eine Kante von a mit $m := \mu(s) > 1$, dann ersetze s durch einen Weg

$$(Q(s), s_1, s_2, \ldots, s_m, Z(s))$$

mit neuen Kanten $s_1, \ldots, s_m$ und definiere

$$\mu(s_i) = x_i \quad \text{für} \quad \mu(s) = x_1, \ldots, x_m,\ x_i \in X.$$

Endliche Akzeptoren (10)

Wiederhole diesen Schritt so lange, bis alle solchen Kanten eliminiert sind.

Resultat: Akzeptor a_1 mit $L_{a_1} = L_a$ und $\mu_1(s) \in X \cup \{1\}$.

Schritt 2: 1−elementige Start- und Terminalmengen.

(a) Falls S_1 mehrere Startknoten enthält, ($\sharp S_1 > 1,$) dann füge einen neuen Knoten P_0 ein und zu jedem $P \in S_1$ eine Kante s_P mit $Q(s_P) = P_0$ und $Z(s_P) = P$. Setze $\mu(s_P) = 1$.

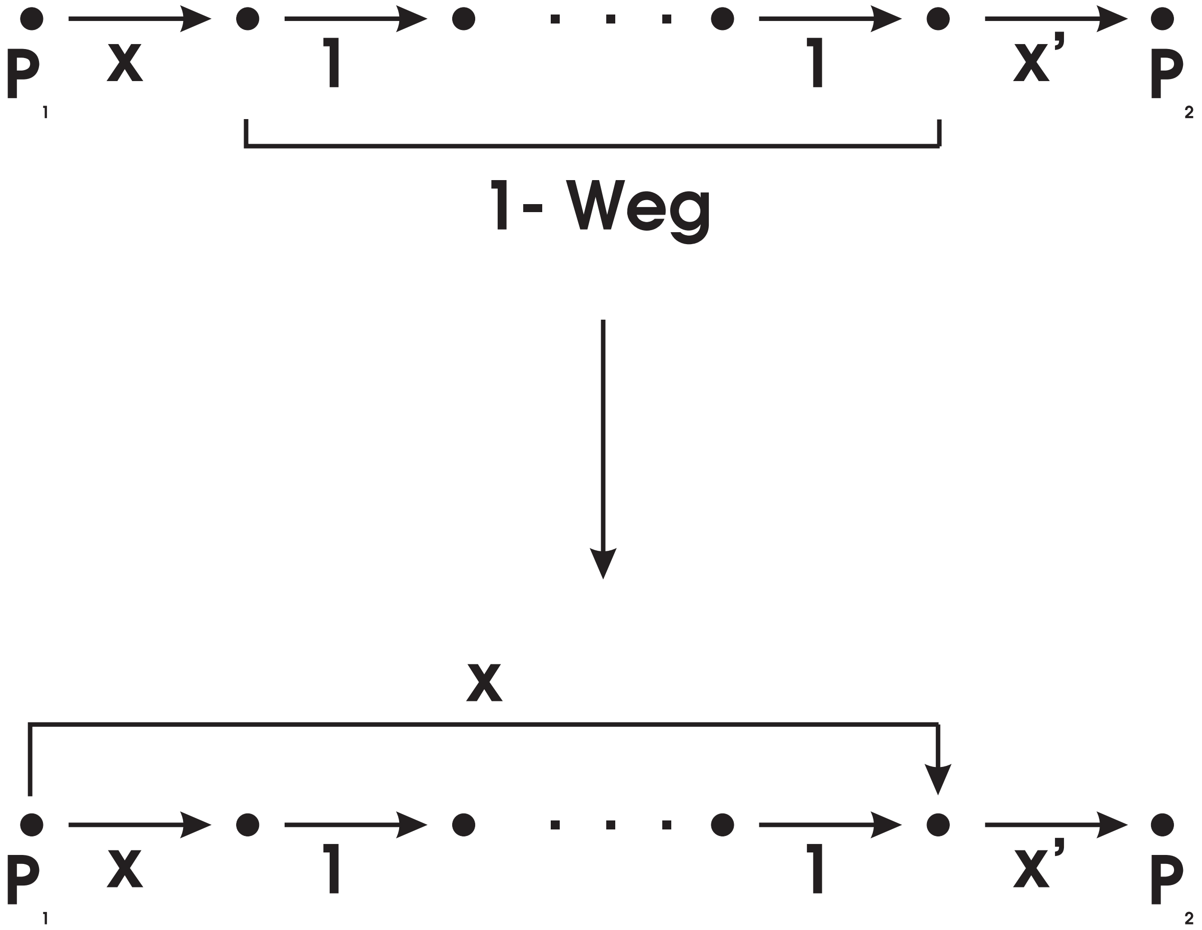
(b) Verfahre analog mit T_1.

Resultat: Akzeptor a_2 mit $L_{a_2} = L_{a_1}, \sharp S_1 = \sharp T_1 = 1$.

Endliche Akzeptoren (11)

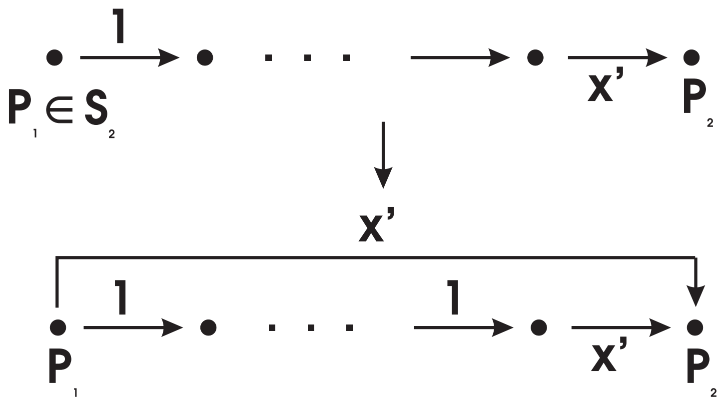
Schritt 3: Überbrücke alle „maximalen“ $1-$Wege w von a_2 durch Kanten.

1. Allgemeiner Fall $x, x' \in X$.

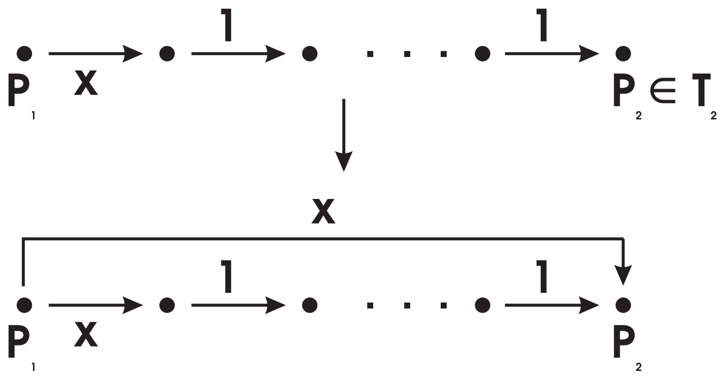


Endliche Akzeptoren (12)

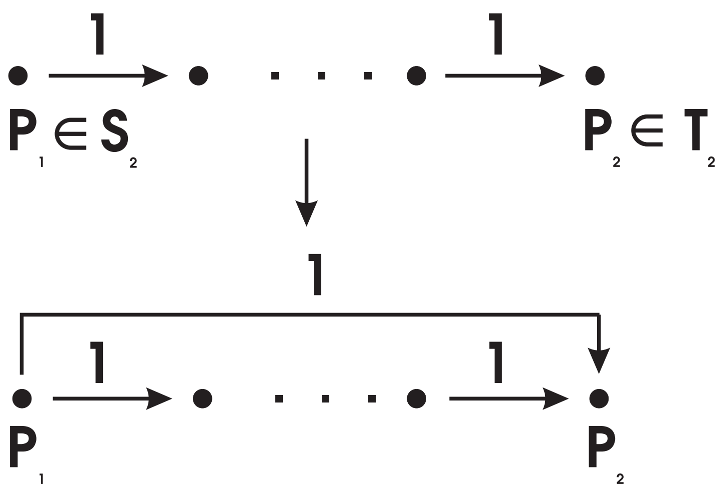
2. Sonderfälle



(a)



(b)



(c)

Endliche Akzeptoren (13)

Iteriere diese Schritte so lange wie möglich, ohne Parallelkanten mit gleicher Markierung zu erzeugen.

Resultat: $a_3, L_{a_3} = L_{a_2}$; gibt es im Akzeptor a_3 einen Weg w, $|w| \geq 1$ mit $\mu_3(w) \in X$, dann gibt es auch eine Kante s in a_3 mit $Q(w) = Q(s)$, $Z(w) = Z(s)$ und $\mu(w) = \mu(s)$.

Schritt 4: Eliminiere alle Kanten s von a_3 mit $\mu_3(s) = 1$ außer der eventuell existierenden Kante

$$S_3 \xrightarrow{1} T_3.$$

Resultat: $a' := a_4$ erfüllt die Aussage des Lemmas.