Syntaktische Kongruenz

Sei: M Monoid, $L \subset M$.

Definition: Für $a, b \in M$ gilt

$a \equiv b\,(L) :\Longleftrightarrow \forall\, u, v, \in M:\ (uav \in L \Leftrightarrow ubv \in L)$.

Sprechweise: a syntaktisch kongruent b modulo L.

Es gilt für $a, b, c \in M$

$$\text{Äquivalenz} \begin{cases} a \equiv a\ (L), \\ a \equiv b\ (L) \Leftrightarrow b \equiv a\ (L), \\ a \equiv b\ (L), b \equiv c\ (L) \Rightarrow a \equiv c\ (L) \end{cases}$$

Kongruenz:

$$a \equiv b\ (L) \Leftrightarrow \forall\, u, v \in M:\ uav \equiv ubv\ (L)$$

Syntaktisches Monoid (1)

Definition:

$$[a]_L := \{b \in M \mid a \equiv b(L)\}.$$
$$synt_M(L) := \{[a]_L \mid a \in M\}.$$
$$[a]_L \cdot [b]_L := [a \cdot b]_L.$$

Beweis der Wohldefiniertheit

$$a' \equiv a(L) \longrightarrow [a \cdot b]_L \equiv [a' \cdot b]_L.$$

Beweis: Für alle $u, v \in M$ gilt

$$ua'v \in L \Longleftrightarrow uav \in L.$$

Wähle v speziell: $v = b \cdot v'$.

Es folgt $uabv' \in L \Longleftrightarrow ua'bv' \in L$ für alle $u, v' \in M$, d.h. $[ab]_L = [a'b]_L$.

Analog für $b \equiv b'(L)$: $[ab]_L = [ab']_L$.

Es folgt $[ab]_L = [a'b]_L = [a'b']_L$

Syntaktisches Monoid (2)

Es gilt

$$\begin{aligned} ([a] \cdot [b]) \cdot [c] &= [ab] \cdot [c] &= [abc] \\ [a] \cdot ([b] \cdot [c]) &= [a] \cdot [bc] &= [abc]. \end{aligned}$$

Also: Das Produkt ist assoziativ.

Es gilt

$$[1] \cdot [a] = [a] = [a] \cdot [1].$$

Also: [1] ist Einheit in $synt_M(L)$.

Also: $synt_M(L)$ ist ein Monoid.

Es heißt das syntaktische Monoid von L bezüglich M.

Syntaktisches Monoid (3)

Ein Beispiel: Das syntaktische Monoid der Dycksprache.

Sei $\Sigma := \Sigma^+ \cup \Sigma^-$

$$\Sigma^+ := \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}, \Sigma^- := \{\sigma_1^-, \ldots, \sigma_n^-\}.$$

Definition: $D(\Sigma)$ ist der Durchschnitt aller Teilmengen L von Σ^*, die (1), (2) und (3) erfüllen. $D(\Sigma)$ heißt Dycksprache zu Σ.

$$\begin{array}{lll} (1) & 1 \in D(\Sigma) & \\ (2) & u, v \in D(\Sigma) & \Rightarrow \; u \cdot v \in D(\Sigma) \\ (3) & u \in D(\Sigma) & \Rightarrow \; \forall_i \sigma_i \cdot u \cdot \sigma_i^- \in D(\Sigma) \end{array}$$

Wegen (1) und (2) gilt: $D(\Sigma)$ ist Monoid.

Syntaktisches Monoid (4)

Man kann zeigen (Übung): (Wir lassen den Index L in $[]_L$, $L = D(Z)$ weg.)

$$[1] = D(\Sigma).$$

$$0 := [\sigma_i] \cdot [\sigma_j^-] \quad \text{für } i \neq j.$$

ist unabhängig von i, j und es gilt

$$\forall_{a \in M} 0 \cdot [a] = [a] \cdot 0 = 0.$$

Zu jedem $u \in (\Sigma^+)^*$ gibt es genau ein $v \in (\Sigma^-)^*$ mit

$$[u] \cdot [v] = [1].$$

Syntaktisches Monoid (5)

Approximation von $L \subset M$

Aufgabe: Sei $L \subset M$ gegeben. Gesucht werden

- ein Monoid S,
- ein Homorphismus $h : M \to S$,
- ein $T \subset S$

so, daß gilt:

(1) $h^{-1}(T) \supset L$

(2) Es gibt keine Wahl S', T', h', so daß

$$h^{-1}(T) \supsetneq h'^{-1}(T') \supset L$$

gilt.

Satz: Wählt man $S := synt_M(L)$ und $T := \{[a] \mid a \in L\}$, dann erhält man eine Lösung der Aufgabe: $L = h^{-1}(T)$ mit $h(a) := [a.]$

Graphen, Kategorien, Funktoren (1)

Definition: $G = (E, K, \varrho)$, $K \neq \emptyset$ heißt **Graph** $\Longleftrightarrow$: $\varrho : E \to 2^k$, $1 \leq card\ \varrho(s) \leq 2$ für $s \in E$. K heißt Knotenmenge, E Kantenmenge des Graphen. Ist $card\ \varrho(s) = 1$, dann heißt s Schleife.

G heißt **orientierter** Graph:

$$\varrho : E \longrightarrow K \times K.$$

Wir definieren zwei Abbildungen $Q : E \to K$, $Z : E \to K$ mit $\varrho(s) = (Q(s), Z(s))$ für $s \in E$. $Q(s)$ heißt Anfangspunkt, $Z(s)$ Endpunkt von s.

Man kann jedem Graphen G einen orientierten Graphen $\tilde{G}$ zuordnen, indem man jeder Kante s zwei Kanten $(P_1 s P_2)$ und $(P_2 s P_1)$ zuordnet, wenn $\varrho(s) = \{P_1, P_2\}$ ist. Wir setzen

$$Q(P_1 s P_2) = P_1,\ \ Z(P_1 s P_2) = P_2 \quad \text{und}$$
$$Q(P_2 s P_1) = P_2,\ \ Z(P_2 s P_1) = P_1.$$

$\tilde{G}$ heißt der zu G gehörige orientierte Graph.

Graphen, Kategorien, Funktoren (2)

Definition: Ist $G = (E, K, \varrho)$ ein orientierter Graph, dann heißt $w \in E^* - \{1\}$ Weg in G, wenn für $w = (s_1, \ldots, s_n)$

$$Q(s_{i+1}) = Z(s_i) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n-1$$

gilt. Wir setzen $Q(w) = Q(s_1)$, $Z(w) = Z(s_n)$. $Q(w)$ heißt der Anfangspunkt, $Z(w)$ der Endpunkt von w.

Ist G ein nicht orientierter Graph, dann heißt jeder Weg in dem zugehörigen orientierten Graphen $\tilde{G}$ **Weg** in G.

Wir ergänzen die Menge der Wege durch die Menge der „leeren Wege“

$$\{(P, P) \mid P \in K\}.$$

Bezeichnung: $1P := (P, P)$,

$\mathcal{W}(G) = \{w \in E^* - \{1\} \mid w \text{ Weg in } G\} \cup \{1_P \mid p \in K\}$.

Graphen, Kategorien, Funktoren(3)

Der Graph G heißt **zusammenhängend** $:\Longleftrightarrow$ Zu jedem $(P_1, P_2) \in K^2$ gibt es einen Weg in G mit $Q(w) = P_1, Z(w) = P_2$.

Ist G ein orientierter Graph, dann heißt er **schwach** zusammenhängend, wenn es zu $P_1, P_2 \in K$ einen Weg gibt mit

$$P_1 \xrightarrow{w} P_2 \quad \text{oder} \quad P_2 \xrightarrow{w} P_1.$$

Der orientierte Graph heißt **stark** zusammenhängend, falls es zu jedem **Paar** $(P_1, P_2) \in K \times K$ ein $w \in \mathcal{W}(G)$ gibt mit $Q(w) = P_1,)$ $Z(w) = P_2$.

Ein Knoten S von G heißt ein **Stern** von G $:\Longleftrightarrow$ Ist $P \in K$, dann gibt es einen Weg

$$S \xrightarrow{w} P.$$

in G.

Graphen, Kategorien, Funktoren (4)

Lemma: Ein zusammenhängender nicht orientierter Graph hat stets einen Stern; jeder Knoten des Graphen ist auch Stern von G.

Beweis:

Definition: Ein geschlossener, doppelpunktfreier Weg von G heißt **Kreis** von G.

P Doppelpunkt von w: liegt zweimal im Inneren von w.