Universität des Saarlandes
Fachbereich 14 – Informatik
Prof. Dr. G. Hotz / Dr. E. Schömer / T. Warken

Bonusübungsblatt (Nr. 12) Informatik IV

(Abgabe: 15.Juli 1999)

1. **Aufgabe**: TRANSITIVITÄT DER POLYNOMIALZEIT-REDUZIERBARKEIT (Punkte: 2)

   Seien Σ_1 und Σ_2 Alphabete. Eine Sprache $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ heißt *polynomialzeit-reduzierbar* auf eine Sprache $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$, in Zeichen $L_1 \leq_p L_2$, falls es eine polynomialzeit-berechenbare Funktion $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ gibt, so daß für alle $w \in \Sigma_1^*$ gilt: $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$. Die Funktion f heißt dann eine *Polynomialzeit-Reduktion* von L_1 auf L_2.

   Zeigen Sie, daß die Relation $\leq_p$ transitiv ist.

2. **Aufgabe**: (Punkte: 3)

   Zeigen Sie, daß die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

   (i) $P = NP$

   (ii) Es gibt eine NP-vollständige Sprache L mit $L \in P$.

3. **Aufgabe**: CLIQUE (Punkte: 5)

   Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $k \in \mathbb{N}$. Eine Clique der Größe k in G ist eine Teilmenge $V' \subseteq V$ mit $\sharp V' = k$, so daß es für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ eine Kante $\{u, v\} \in E$ gibt. Das Problem CLIQUE ist das Problem, zu entscheiden, ob ein gegebener Graph eine Clique vorgegebener Größe besitzt. Formal:

   $$\mathrm{CLIQUE} = \{(G, k) \mid G \text{ ist ungerichteter Graph, } k \in \mathbb{N}, \text{ und } G \text{ besitzt eine Clique der Größe } k\}$$

   Zeigen Sie, daß CLIQUE NP-vollständig ist.

   Hinweis: Zeigen Sie SAT $\leq_p$ CLIQUE.

4. **Aufgabe**: SAT-VARIANTEN (Punkte: 5)

   Das Problem $3-\mathrm{SAT}$ ist die Einschränkung von SAT auf Klauselmengen, in denen jede Klausel höchstens drei Literale hat. Wir haben in der Vorlesung gesehen, daß $3 - \mathrm{SAT}$ NP-vollständig ist.

   (a) Das Problem $3-\mathrm{SAT}^*$ sei die Einschränkung von $3-\mathrm{SAT}$ auf Klauselmengen, in denen jede Klausel drei verschiedene Literale enthält. Zeigen Sie, daß auch $3 - \mathrm{SAT}^*$ NP-vollständig ist.

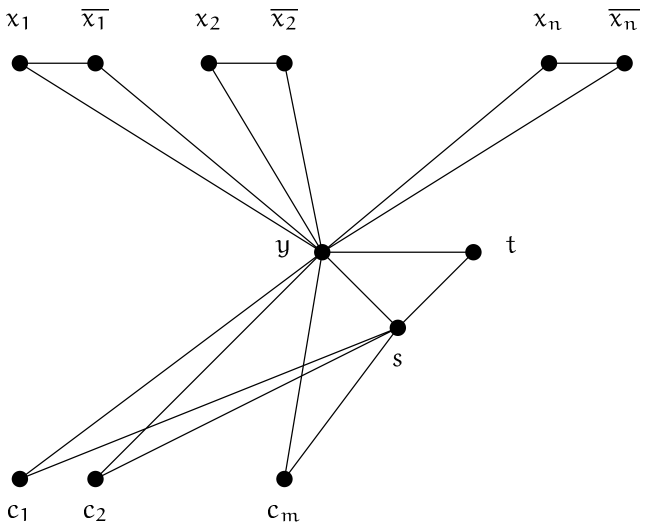
   (b) Das Problem $3 - \mathrm{SAT}^{**}$ sei die Einschränkung von $3 - \mathrm{SAT}^*$ auf Klauselmengen, in denen jede Variable insgesamt höchstens dreimal auftaucht. Zeigen Sie, daß $3 - \mathrm{SAT}^{**}$ deterministisch in polynomieller Zeit lösbar ist.

   Hinweis: Heiratsproblem (das müssen Sie nicht beweisen):
   Ein ungerichteter bipartiter Graph ist ein ungerichteter Graph, dessen Knotenmenge sich in eine linke und eine rechte Teilmenge aufteilen läßt, so daß jede Kante einen Knoten aus der linken mit einem Knoten aus der rechten Teilmenge verbindet. Ist in einem bipartiten Graph jede Teilmenge von Knoten auf der linken Seite mit einer mindestens gleich großen Teilmenge von Knoten auf der rechten Seite verbunden, so gibt es ein Matching, das alle Knoten der linken Seite umfaßt. (Ein Matching ist eine Teilmenge der Kanten, deren Endpunkte paarweise verschieden sind.)

   (c) Das Problem SAT3 sei die Einschränkung von SAT auf Klauselmengen, in denen jede Variable insgesamt höchstens dreimal auftaucht. Zeigen Sie, daß SAT3 NP-vollständig ist.

5. **Aufgabe**: FÄRBUNG VON GRAPHEN (Punkte: 5)

   Ein Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist *3-färbbar*, wenn es eine Funktion $f : V \to \{1, 2, 3\}$ gibt mit $f(u) \neq f(v)$ für alle Kanten $\{u, v\} \in E$. Die Sprache 3COL ist die Menge aller 3-färbbaren Graphen. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, daß 3COL NP-vollständig ist. Dazu wollen wir eine Reduktion von $3-\mathrm{SAT}$ auf 3COL durchführen. Sei eine beliebige Formel $F = c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$ in KNF mit drei Literalen pro Klausel gegeben. Die Variablen seien $x_1, \ldots, x_n$. Betrachten Sie den folgenden Graphen G: (bitte wenden)



(a) Charakterisieren Sie alle 3-Färbungen von G, in denen y die Farbe 3 hat.

(b) Inwiefern kann man eine Färbung als eine Variablenbelegung auffassen?

(c) Geben Sie einen einfachen Graphen[1] mit drei Eingangsknoten und einem Ausgangsknoten an, der die folgenden beiden Eigenschaften hat.

   i. Hat der Eingangsknoten die Farbe 1, dann kann man die restlichen Knoten so färben, daß auch der Ausgangsknoten die Farbe 1 hat.

   ii. Haben alle Eingangsknoten die gleiche Farbe, muß in einer 3-Färbung auch der Ausgangsknoten diese Farbe haben.

(d) Benutzen Sie den Graphen aus Teil (c), um G so zu erweitern, daß der entstehende Graph genau dann 3-färbbar ist, wenn die Ausgangsformel erfüllbar ist. Beweisen Sie diese Äquivalenz.

(e) Was ist noch zu tun, um den Beweis, daß $3\mathrm{COL}$ NP-vollständig ist, zu vervollständigen?

[1] es geht planar mit 9 Knoten