Universität des Saarlandes
Fachbereich 14 – Informatik
Prof. Dr. G. Hotz / Dr. E. Schömer / T. Warken

11. Übungsblatt Informatik IV

(Abgabe: 8.Juli 1999)

1. **Aufgabe**: PRÄDIKATENLOGIK MIT IDENTITÄT (Punkte: 5)

   In der *Prädikatenlogik mit Identität* ist auch das Prädikatssysmbol "=" zugelassen, das Gleichheit zwischen Termen bedeuten soll. Wie muß die Sysntax und die Semantik der Prädikantenlogik erweitert werden, um die Prädikatenlogik mit Identität zu erhalten?

2. **Aufgabe**: ENDLICHE UND UNENDLICHE MODELLE (Punkte: 8)

   (a) Gegeben sei die Formel

   $$F = \forall x\Big(\forall y\big(P(x,y) \to \neg P(y,x)\big)\Big) \wedge \forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x \forall y \forall z\Big(\big(P(x,y) \wedge P(y,z)\big) \to P(x,z)\Big)$$

   i. Geben Sie ein Modell für F an.
   ii. Zeigen Sie, daß jedes Modell für F unendlich ist, d.h. daß das Universum U unendlich viele Elemente enthält. (Beachten Sie, daß das Universum per Definition nie leer ist.)

   (b) Sei F eine prädikatenlogische Formel, und es sei bekannt, daß F ein endliches Modell hat. Beschreiben Sie eine Prozedur, die ein endliches Modell für F findet.

   (c) Sei F eine abgeschlossene prädikatenlogische Formel, die keine Funktionssymbole und nur einstellige Prädikatssymbole enthält. Zeigen Sie: Wenn es ein Modell für F gibt, dann gibt es ein endliches Modell für F, dessen Elementanzahl man nach oben abschätzen kann. Schließen Sie daraus, daß es einen Algorithmus gibt, der das Erfüllbarkeitsproblem für solche Formeln entscheidet.

   Hinweis: Zu einem unendlichen Modell mit Universum U definieren Sie eine geeignete Äquivalenzrelation auf U, die U in endlich viele Äquivalenzklassen einteilt. Benutzen Sie die Menge dieser Äquivalenzklassen als neues Universum.

3. **Aufgabe**: HERBRANDMODELLE (Punkte: 7)

   Sei F eine abgeschlossene Formel in Skolemform und a eine beliebige Konstante (d.h. nullstelliges Funktionssysmbol). Das *Herbrand-Universum* $D(F)$ von F ist die kleinste Menge mit:

   1. Alle in F vorkommenden Konstanten sind in $D(F)$. Falls F keine Konstanten enthält, ist a in $D(F)$.
   2. Sei f_i^k ein in F vorkommendes Funktionssymbol, und seien $t_1, \ldots, t_k \in D(F)$. Dann ist auch der Term $f_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ in $D(F)$.

   Eine zu F passende Interpretation α heißt *Herbrand-Interpretation*, falls das Universum U das Herbrand--Universum $D(F)$ ist und für jedes in F vorkommende Funktionssysmbol f_i^k und $t_1, \ldots, t_k \in D(F)$ gilt: $\alpha(f_i^k)(t_1, \ldots, t_k) = f_i^k(t_1, \ldots, t_k)$.

   Sei nun

   $$F = \forall x \forall y(P(x, f(x)) \wedge \neg P(x, g(x)))$$

   (a) Wie sieht $D(F)$ aus?
   (b) Geben Sie ein Modell für F über dem Universum $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen an.
   (c) Geben Sie ein Herbrand-Modell für F an.

Es sei noch einmal daran erinnert, daß zweimaliges Vorrechnen von Übungsaufgaben eine notwendige Bedingung für die Scheinvergabe ist.