Universität des Saarlandes
Fachbereich 14 – Informatik
Prof. Dr. G. Hotz / Dr. E. Schömer / T. Warken

10. Übungsblatt Informatik IV

(Abgabe: 1.Juli 1999)

1. **Aufgabe**: RESOLUTION (Punkte: 4)

   (a) Zeigen Sie mittels Resolution, daß die Formel

   $$F = (\neg x_1 \wedge \neg x_3) \vee x_1 \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)$$

   eine Tautologie ist (d.h. daß die Negation von F unerfüllbar ist).

   (b) Zeigen Sie mittels Resolution, daß die Formel $x \wedge y \wedge z$ eine Folgerung aus der Formel

   $$F = (\neg x \vee y) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg z)$$

   ist.

2. **Aufgabe**: GRAMMATIK FÜR FORMELN DER PRÄDIKATENLOGIK (Punkte: 5)

   Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Menge der prädikatenlogischen Formeln an. (Sie brauchen nicht zu zeigen, daß Ihre Grammatik eindeutig ist.)

   Hinweis: Da es unendlich viele Variablen-, Funktions- und Prädikatssymbole gibt, können Sie diese wie folgt kodieren:

   $$\begin{array}{rll} x_i & \text{wird kodiert durch} & x\mathbf{I}^i\$ \\ f_i^k(\dots) & \text{wird kodiert durch} & f\mathbf{I}^i\$\mathbf{I}^k(\dots) \\ P_i^k(\dots) & \text{wird kodiert durch} & P\mathbf{I}^i\$\mathbf{I}^k(\dots) \end{array}$$

   $\mathbf{I}^i$ bedeutet dabei $\mathbf{II}\cdots\mathbf{I}$ (i mal).

3. **Aufgabe**: MODELLE (Punkte: 4)

   (a) Welche der folgenden Strukturen sind Modelle für die Formel

   $$\forall x \forall y \forall z \big(((P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow P(x,z)) \wedge P(x,x) \wedge (P(x,y) \leftrightarrow P(f(y), f(x)))\big) \ ?$$

   i. $$\begin{array}{rcl} U &=& \{a,b\}^*, \\ \alpha(P) &=& \{(u,v) \mid u,v \in U,\ u \text{ ist Präfix von } v\}, \\ \alpha(f)(u) &=& u^R \text{ für alle } u \in U \ (u^R \text{ heißt ``u gespiegelt''.}) \end{array}$$

   ii. $$\begin{array}{rcl} U &=& 2^{\mathbb{N}} \text{ (die Potenzmenge von } \mathbb{N}), \\ \alpha(P) &=& \{(A,B) \mid A,B \subseteq \mathbb{N},\ A \subseteq B\} \\ \alpha(f)(A) &=& A \cup \{1\} \text{ für alle } A \subseteq \mathbb{N} \end{array}$$

   iii. $$\begin{array}{rcl} U &=& \mathbb{Z}, \\ \alpha(P) &=& \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z},\ m < n\}, \\ \alpha(f)(n) &=& -n \text{ für alle } n \in \mathbb{Z} \end{array}$$

   (b) Geben Sie eine prädikatenlogische Formel F an, die das Prädikatssymbol P enthält, mit folgender Eigenschaft: Ist (U, α) ein Modell für F, so ist $\alpha(P)$ eine Äquivalenzrelation auf U.

4. **Aufgabe**: ÄQUIVALENZEN (Punkte: 4)

   Seien F und G beliebige Formeln der Prädikatenlogik. Beweisen Sie formal die folgenden Äquivalenzen.

   (a) $(\forall x F \wedge \forall x G) \equiv \forall x (F \wedge G)$

   (b) $(\exists x F \vee \exists x G) \equiv \exists x (F \vee G)$

(bitte wenden)

5. **Aufgabe**: NORMALFORMEN (Punkte: 3)

(a) Formen Sie die Formel

$$F = (\forall x \exists y P(x, g(y, f(x))) \wedge \forall z \neg Q(z)) \wedge \neg \forall x R(x, y)$$

um in bereinigte Pränexform.

(b) Sei F eine Formel in bereinigter Pränexform. Dann liefert der folgende Algorithmus die Skolemform von F:

while F enthält einen Existenzquantor **do**
  begin
    F habe die Form $F = \forall y_1 \forall y_2 \cdots \forall y_n \exists z G$ für eine Formel G in bereinigter Pränexform und $n \geq 0$;
    Sei f ein neues bisher in F nicht vorkommendes n-stelliges Funktionssymbol;
    $F := \forall y_1 \forall y_2 \cdots \forall y_n G[z/f(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$;
    (d.h. der Existenzquantor wird gestrichen und jedes Vorkommen der Variablen z in G wird durch $f(y_1, \ldots, y_n)$ ersetzt.)
  end

Wenden Sie diesen Algorithmus auf die bereinigte Pränexform der Formel F aus Teil (a) an.