Universität des Saarlandes
Fachbereich 14 – Informatik
Prof. Dr. G. Hotz / Dr. E. Schömer / T. Warken

4. Übungsblatt Informatik IV

(Abgabe: bis spätestens Mittwoch, den 12.Mai 1999)

1. **Aufgabe**: KONFLUENTE GRAMMATIKEN (Punkte: 10)

Die kontextfreien Grammatiken G_1 und G_2 seien durch folgende Produktionensysteme gegeben.

$$G_1: \quad S \to SS + aSb + 1$$

$$G_2: \quad S \to SS + x_1Sy_1 + y_1Sx_1 + x_2Sy_2 + y_2Sx_2 + 1$$

(a) Auf der Menge $\{a,b\}^*$ definieren wir die Kürzungsregel $ab = 1$. Zum Beispiel kann das Wort $aabba$ auf aba und weiter auf a reduziert werden. Ein Wort, das aus w durch Anwenden dieser Regel hervorgeht, und das sich nicht mehr weiter kürzen läßt, nennen wir Kurzwort von w. Zeigen Sie, daß es zu jedem $w \in \{a,b\}^*$ ein eindeutig bestimmtes Kurzwort gibt.

(b) Auf der Menge $\{x_1, y_1, x_2, y_2\}^*$ definieren wir die Kürzungsregeln $x_1y_1 = 1, y_1x_1 = 1, x_2y_2 = 1, y_2x_2 = 1$. Zum Beispiel kann das Wort $x_1x_1x_2y_2y_1$ auf $x_1x_1y_1$ und weiter auf x_1 reduziert werden. Der Begriff des Kurzwortes ist analog zu Teil a) definiert. Zeigen Sie, daß es zu jedem $w \in \{x_1, y_1, x_2, y_2\}^*$ ein eindeutig bestimmtes Kurzwort gibt.

(c) Zeigen Sie, daß G_1 und G_2 konfluent sind.
Hinweis: Die Erkenntnisse aus a) und b) können hilfreich sein.

2. **Aufgabe**: ÜBERFLÜSSIGE PAARE VON VARIABLEN (Punkte: 5)

Sei $G = (V, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform ohne überflüssige Variablen und ohne ϵ-Produktionen. Ein Paar $(X, Y) \in V^2$ heißt überflüssig, falls es keine $u, v \in T^*$ gibt, so daß gilt $S \xrightarrow{*} uXYv$.

Wir betrachten folgende Vorgehensweise zur Bestimmung dieser Paare: Wir definieren einen Graph mit Knotenmenge $V \cup V^2$. Es gebe genau dann eine Kante von $(X_1, X_2) \in V^2$ nach $(Y_1, Y_2) \in V^2$, wenn es $u, v \in T^*$ gibt, so daß $X_1 \xrightarrow{*} uY_1$ und $X_2 \xrightarrow{*} Y_2v$. Ferner gebe es genau dann eine Kante von $Z \in V$ nach $(X_1, X_2) \in V^2$, wenn $Z \to X_1X_2$ eine Produktion in P ist. Schließlich gebe es für jedes $Z \in V \backslash \{S\}$ eine Kante von S nach Z.

(a) Zeigen Sie: (X_1, X_2) ist genau dann nicht überflüssig, wenn (X_1, X_2) in dem Graph von S aus erreichbar ist.

(b) Geben Sie einen Algorithmus an, der für $X, Y \in V$ entscheidet, ob es $u \in T^*$ gibt, so daß $X \xrightarrow{*} uY$ gilt. Welche Laufzeit hat Ihr Algorithmus? Kann man Ihren Algorithmus geringfügig modifizieren, so daß er entscheidet, ob es $u \in T^*$ gibt, so daß $X \xrightarrow{*} Yu$ gilt?

(c) Wir wollen nun untersuchen, wie man in einem gerichteten Graph alle Knoten bestimmen kann, die von einem gegebenen Knoten aus erreichbar sind. Gegeben sei also ein gerichteter Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ mit Knotenmenge $\mathcal{V}$ und Kantenmenge $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Weiter sei ein Knoten $s \in \mathcal{V}$ gegeben. Folgender Algorithmus benutzt Tiefensuche (depth first search, DFS), um alle in $\mathcal{G}$ von s aus erreichbaren Knoten auszugeben. Wir nehmen an, daß die Knoten adreßtauglich sind, d.h. man kann sie als Array-Indizes benutzen.

```
DFS()
{   forall p ∈ V do
        nodevisited[p] = 0
    DFS-visit(s)
}

DFS-visit(v)
{   output(v)
    nodevisited[v] = 1
    forall q ∈ V with (v, q) ∈ E do
        if nodevisited[q] = 0 then DFS-visit(q)
}
```

Welche Laufzeit hat dieser Algorithmus in Abhängigkeit von $n = \sharp\mathcal{V} + \sharp\mathcal{E}$?

3. **Aufgabe**: SCHNITT KONTEXTFREIER SPRACHEN (Punkte: 5)

   Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, daß der Schnitt zweier kontextfreier Sprachen im allgemeinen nicht kontextfrei ist.