Universität des Saarlandes
Fachbereich 14 – Informatik
Prof. Dr. G. Hotz / Dr. E. Schömer / T. Warken

3. Übungsblatt Informatik IV

(Abgabe: 6. Mai 1999)

1. **Aufgabe**: Konstruktion von CFGs (Punkte: 5)

   Wir wollen Sprachen über dem Alphabet $A = \{0, 1, \sharp\}$ betrachten. Geben Sie kontextfreie Grammatiken an für die Mengen

   (a) $L_a = \{u\sharp v \mid u, v \in \{0,1\}^n, n \geq 0\}$,
   (b) $L_b = L_a \setminus \{1^n \sharp 0^n \mid n \geq 0\}$,
   (c) $L_c = \{0, 1, \sharp\}^+ \setminus \{b_1 \sharp b_2 \sharp \ldots \sharp b_n \mid n \geq 2\}$, wobei $b_i \in 1\{0,1\}^*$ die Binärdarstellung von i bezeichnet.

2. **Aufgabe**: Elimination überflüssiger Nichtterminale (Punkte: 10)

   Gegeben sei eine kontextfreie Grammatik $G = (V, T, P, S)$. Wir wollen in zwei Schritten eine neue kontextfreie Grammatik $G'' = (V'', T, P'', S)$ konstruieren, die keine überflüssigen Nichtterminale besitzt.

   (a) Zeigen Sie, daß folgendes Programm die Menge aller Nichtterminale V' bestimmen kann, für die es eine Ableitung zu einem Terminalwort $w \in T^*$ gibt: $V' = \{U \in V \mid U \xrightarrow{*} w \text{ mit } w \in T^*\}$

   $V' \leftarrow \emptyset$
   for i **from** 1 **to** $\sharp V$ **do**
   $\quad V' \leftarrow \{U \mid U \rightarrow u \text{ mit } u \in (T \cup V')^*\}$

   (b) Welche Laufzeit hat diese Vorgehensweise? Können Sie die Laufzeit verbessern? Drücken Sie die Laufzeit aus in der Größe n der Grammatik G.

   $$n = \sum_{(U,u) \in P} |u|$$

   Dabei kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß $\sharp V \leq n$ gilt.

   (c) Geben Sie einen weiteren Algorithmus an, mit dessen Hilfe alle Nichtterminale gefunden werden können, die vom Startsymbol S aus erreichbar sind. $V''=\{U \in V' \mid S \xrightarrow{*} uUv \text{ mit } u, v \in (T \cup V')^*\}$

   (d) Darf man den ersten mit dem zweiten Schritt vertauschen, ohne die Korrektheit des Gesamtverfahrens zu beeinflussen?

3. **Aufgabe**: Pumping-Lemma (Punkte: 5)

   In Ergänzung zum Pumping-Lemma aus der Vorlesung kann man folgende Verschärfung beweisen:

   > Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es eine von L abhängige Konstante n, so daß sich jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ schreiben läßt als $z = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$ und für alle $i \geq 0$ gilt $uv^iwx^iy \in L$.

   Benutzen Sie diese Version, um zu beweisen, daß folgende Sprachen nicht kontextfrei sind.

   (a) $L_a = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$
   (b) $L_b = \{a^i b^j \mid j = i^2\}$
   (c) $L_c = \{a^i b^j a^i b^j \mid i, j \geq 1\}$