**Universität des Saarlandes**
**Fachbereich 14 – Informatik**
Prof. Dr. G. Hotz / Dr. E. Schömer / T. Warken

# 2. Übungsblatt Informatik IV

(Abgabe: 29. April 1999)

1. **Aufgabe**: CFG FÜR AUSDRÜCKE DER KLEENE–ALGEBRA (Punkte: 5)

   Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an für die Menge aller Zeichenketten über dem Alphabet $\{a, b, \cdot, +, {}^*, (, ), \varepsilon, \emptyset\}$, die wohlgeformte reguläre Ausdrücke der Kleene–Algebra über dem Alphabet $\{a, b\}$ sind.

2. **Aufgabe**: CYK–ALGORITHMUS (Punkte: 15)

   Gegeben sei eine Grammatik $G$ in Chomsky–Normalform mit den Nichtterminalsymbolen $\{S_1, \dots, S_K\}$ und den Terminalsymbolen $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_H\}$. $S_1$ sei das Startsymbol. Das Produktionensystem sei durch die Produktionen $\{P_1, \dots, P_L\}$ der Form $P_l = (S_{P_{l,1}} \to S_{P_{l,2}} \cdot S_{P_{l,3}})$ und die terminierenden Produktionen $\{Q_1, \dots, Q_M\}$ der Form $Q_m = (S_{Q_{m,1}} \to \sigma_{Q_{m,2}})$ gegeben.

   Der CYK–Algorithmus kann das Wortproblem für ein $w = w_1\, w_2 \dots w_n \in \Sigma^n$ wie folgt entscheiden:

```
for i from 1 to n do
  for j from 1 to n do
    for k from 1 to K do
      X[i, j, k] ← 0
for i from 1 to n do
  for m from 1 to M do
    if w[i] = σ[Q[m, 2]] then X[i, i, Q[m, 1]] ← 1
for j from 1 to n − 1 do
  for i from 1 to n − j do
    for k from i to i + j − 1 do
      for l from 1 to L do
        if X[i, k, P[l, 2]] = 1 and X[k + 1, i + j, P[l, 3]] = 1 then X[i, i + j, P[l, 1]] ← 1
return X[1, n, 1]
```

   (a) Überprüfen Sie, ob diese Implementierung des CYK–Algorithmus die folgende Invariante aufrechterhält: $X_{ijk} = 1 \Longrightarrow S_k \xrightarrow{*} w_i \dots w_j$

   (b) Sei $G_1 = (\{S_1, \dots, S_4\}, \mathbb{B}, \{S_1 \to S_1\, S_1, S_1 \to S_3\, S_2, S_1 \to S_3\, S_4, S_2 \to S_1\, S_4, S_3 \to 1, S_4 \to 0\}, \{S_1\})$. Ermitteln Sie das Tableau $X_{ij}$ für $w = 1010110100$.

   (c) Bestimmen Sie die Laufzeit und den Speicherbedarf dieser Implementierung in Abhängigkeit von den Größen $L$, $M$, $n$ und $K$.

   (d) Modifizieren Sie den Code geringfügig, so daß man die Multiplizität von $w$ bestimmen kann.

   (e) Sei $G_2 = (\{S\}, \{a\}, \{S \to S\, S, S \to a\}, \{S\})$. Bestimmen Sie die Multiplizität von $a^4$ und $a^{14}$ bezüglich $G_2$.

   (f) BONUSAUFGABE (Punkte: 10)

   Können Sie einen Zusammenhang herstellen zwischen der Multiplizität von $a^n$ bezüglich $G_2$, der Zahl der binären Bäume mit $n$ Blättern, der Zahl der Dyckwörter der Länge $2n$ und den Catalan'schen Zahlen $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$?