Universität des Saarlandes
Fachbereich 14 – Informatik
Prof. Dr. G. Hotz / Dr. B. Schieffer / A. Reichert

5. Übungsblatt Schaltkreis-Theorie

(Abgabe: Freitag, den 30.5.97)

Aufgabe 1: Sei $M \subset S(\mathbb{B}^2)$, gegeben durch

$$M \;:=\; \{f \in S(\mathbb{B}^2) \mid \forall(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{B}^2 : f(\xi_1,\xi_2) = f(\xi_2,\xi_1)\}$$

Zeigen Sie, daß M eine Unteralgebra von $S(\mathbb{B}^2)$ ist. Bestimmen Sie ihre Atome. Stellen Sie die Elemente von M als Disjunktion von Atomen dar.

Aufgabe 2: Wir definieren:

$$\begin{aligned}
L(i) &:= \{0,1,\ldots,2\,(2^i-1)\}\\
T_i^n(l'') &:= \{(l_1,l_2) \mid l'' = 2^i l_1 + l_2,\ l_1 \in L(n-i), l_2 \in L(i)\}\\
a_{l''}^{(n)} : \mathbb{B}^{2n} \to \mathbb{B} & \quad \text{für } l'' \in L(n)\\
a_{l''}^{(n)}(\xi_{n-1},\ldots,\xi_0,\gamma_{n-1},\ldots,\gamma_0) = 1 &:\Longleftrightarrow \sum_{j=0}^{n-1} 2^j\,(\xi_j+\gamma_j) = l''
\end{aligned}$$

Sei nun $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ und $l, l', \bar{l}, \tilde{l}$ für $l'' \in L(n)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
l &:= l'' \bmod 2^i\\
l' &:= (l''-l)/2^i\\
\tilde{l} &:= \begin{cases} l+2^i & ;\text{ falls } l < 2^i-1 \text{ und } l' > 1\\ l & ;\text{ sonst}\end{cases}\\
\bar{l} &:= \begin{cases} l'-1 & ;\text{ falls } l < 2^i-1 \text{ und } l' > 1\\ l' & ;\text{ sonst}\end{cases}
\end{aligned}$$

Zeigen Sie

$$\begin{aligned}
T_i^n(l'') &= \{(l',l);(\bar{l},\tilde{l})\}\\
a_{l''}^{(n)} &= a_{l'}^{(n-i)} \cdot a_l^{(i)} \cup a_{\bar{l}}^{(n-i)} \cdot a_{\tilde{l}}^{(i)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Seien $(a_{n-1},\ldots,a_1,a_0)$ und $(b_{n-1},\ldots,b_1,b_0)$ die Binärdarstellungen zu $a,b \in \mathbb{N}_0$. Entwickeln Sie einen booleschen Schaltkreis zur simultanen Berechnung dreier Funktionen $f_i : \mathbb{B}^{2n} \to \mathbb{B}$ für $i = 1,2,3$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
f_1 = 1 &\;\Leftrightarrow\; a > b\\
f_2 = 1 &\;\Leftrightarrow\; a = b\\
f_3 = 1 &\;\Leftrightarrow\; a < b
\end{aligned}$$

Überlegen Sie sich eine rekursive Beschreibung eines solchen Schaltkreises und geben Sie Ihren Entwurf mit dem System *CADIC* ein.