Universität des Saarlandes
Fachbereich 14 – Informatik
Prof. Dr. G. Hotz / Dr. B. Schieffer / A. Reichert

3. Übungsblatt Schaltkreis-Theorie

(Abgabe: Freitag, den 9.5.97)

Übungsgruppen:

- Montags, 16 Uhr s.t. im Raum 307, Bau 36.1
- Dienstags, 11 Uhr s.t. im Seminarraum 013, Bau 45

Die Übungsblätter gibt es auch über `http://www-hotz.cs.uni-sb.de/`.

Aufgabe 1: Sei $(M, \cup, \cdot, \bar{\ })$ eine Boolesche Algebra, $a \in M, a \neq 0$. Zeigen Sie:

(a) a ist genau dann Atom von M, wenn aus $0 \leq b \leq a$ folgt

$$b = 0 \qquad \text{oder} \qquad b = a$$

(b) Sind a und b Atome von M und ist $a \neq b$, dann ist $a \cdot b = 0$.

Aufgabe 2: Boolesche Algebren lassen sich durch die Vereinigung, den Schnitt und die Komplementbildung auf Mengen erzeugen.

(a) Sei $M_1 := \mathcal{P}\{a, b, c, d\}$. Bestimmen Sie die Atome von M_1. Sei $E_1 := \{e_1, e_2\} \subset M_1$ mit $e_1 := \{a, c\}$ und $e_2 := \{c, d\}$. Zeigen Sie, daß $< E_1 > = M_1$. Ist E_1 ein freies Erzeugendensystem von M_1?

(b) Sei $M_2 := \mathcal{P}\{a, b, c\}$ und $E_2 := \{y_1, y_2\}$ mit $y_1 := \{a, b\}$ und $y_2 := \{b, c\}$. Gibt es ein $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathbb{B}^2$, mit $y_1^{\epsilon_1} y_2^{\epsilon_2} = 0$? Ist E_2 ein freies Erzeugendensystem von M_2?

(c) Sei $D := \{01, 10, 11\}$. Geben Sie einen Homomorphismus $h : M_2 \to S(D)$ an. Was ist $h(E_2)$? Ist h ein Isomorphismus?

Aufgabe 3: Sei $(M, \cup, \cdot, \bar{\ })$ eine boolesche Algebra und A die Menge der Atome von M. Zeigen Sie: M ist isomorph zu $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \bar{\ })$, d.h. der Potenzmenge von A mit den mengentheoretischen Operationen!

Aufgabe 4: Sei $\epsilon, \epsilon' \in D$ und die Vertauschungen $\tau_{\epsilon'}^{\epsilon} : S(D) \to S(D)$ gegeben durch

$$\tau_{\epsilon'}^{\epsilon}(f) := f' \text{ mit } f'(\xi) \quad := \quad \begin{cases} f(\xi) & ; \ \epsilon \neq \xi \neq \epsilon' \\ f(\epsilon) & ; \ \xi = \epsilon' \\ f(\epsilon') & ; \ \xi = \epsilon \end{cases}$$

Charakterisieren Sie die Elemente von $G((S(\mathbb{B}^3), L(\mathbb{B}^3))$ durch Verknüpfung geeigneter Vertauschungen $\tau_{\epsilon'}^{\epsilon}$. $L(\mathbb{B}^3)$ sei dabei die in Aufgabe 1 des zweiten Übungsblattes eingeführte Unteralgebra von $S(\mathbb{B}^3)$.